14. cvičení - Metrické prostory

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Souvislé prostory

Definice 1. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou neprázdných disjunktních otevřených množin.

Věta 2 (Charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

1. Prostor X není souvislý.
2. Existují dvě neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ uzavřené v (X, ρ) a takové, že $X = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná neprázdná množina H splňující $H \neq X$.
4. Existuje spojité surjektivní zobrazení $f : (X, \rho) \to (\{0, 1\}, \rho_{diskr})$.

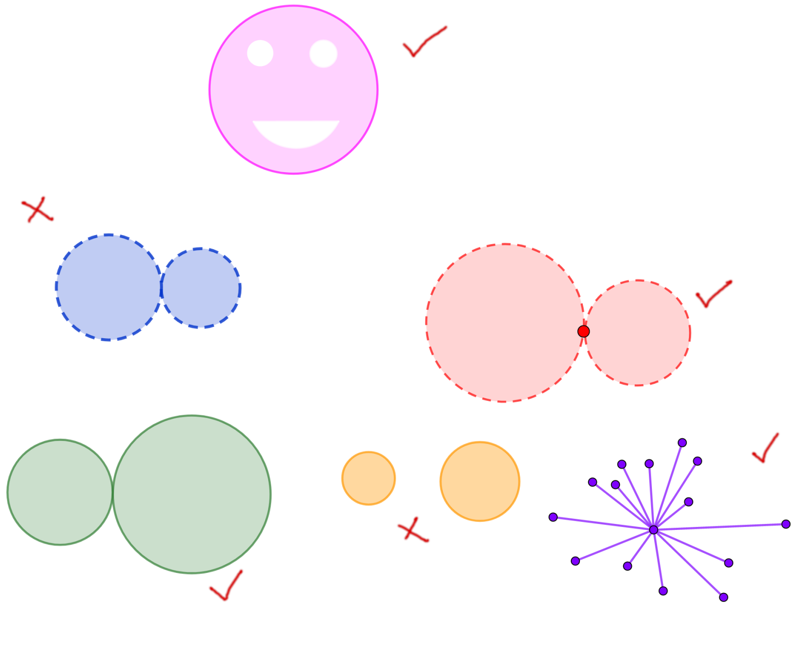
Poznámka 3 (Jiná definice)**.** Prostor (X, ρ) je nesouvislý, jestliže existují disjunktní neprázdné množiny $A, B \subseteq X$ takové, že $X = A \cup B$ a $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Definice 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, nechť $J \subset X$. Řekneme, že J je *křivka* v prostoru (X, ρ), jestliže existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (X, \rho)$ takové, že $f([0, 1]) = J$.

Řekneme, že množina $A \subset X$ je *křivkově souvislá* v prostoru (X, ρ), jestliže pro každé $a, b \in A$ existuje spojité zobrazení $f : [0, 1] \to (A, \rho)$ takové, že $f(0) = a$ a $f(1) = b$.

Věta 5 (O vztahu souvislosti a křivkové souvislosti)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je v tomto prostoru souvislá.

Úloha 6. Které množiny (jsme v $\mathbb{R}^2$) jsou souvislé?



Úloha 7 (PRAVDA – NEPRAVDA).

NE Nechť A není souvislý. Pak $\bar{A}$ není souvislý. Např. $(0,1) \cup (1,2)$.

ANO Nechť A je souvislý. Pak $\bar{A}$ je souvislý.

NE Nechť A je souvislý. Pak $\operatorname{int} A$ je souvislý. Např. dva dotýkající se uzavřené kruhy.

ANO Nechť $\bar{A}$ není souvislý. Pak A není souvislý.

Úloha 8 (PRAVDA – NEPRAVDA).

NE Nechť A není souvislý. Pak A^c není souvislý. Např. doplněk dvou disjunktních kruhů.

NE Nechť A je souvislý. Pak A^c není souvislý. Např. doplněk kruhu.

NE Nechť A je souvislý. Pak A^c je souvislý. Např. A je nekonečný jednotkový pruh podél osy x.

NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cup B$ je souvislá. Např. dva disjunktní kruhy.

NE Nechť A a B jsou souvislé. Pak $A \cap B$ je souvislá. Např. když se protnou na koncích dvě fazole.

Úloha 9. Za jakých podmínek je diskrétní metrický prostor souvislý?
Řešení: Právě tehdy, když má jen jeden prvek

Úloha 10. Ukažte, že prostor $X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ je křivkově souvislý.
Řešení: Zvolme dva body $x, y \in X$. Vytvořme úsečku s krajními body x, y a její osu O. Pak lze najít takový bod $b \in O$, že úsečky xb a xy neprotínají $\mathbb{Q}^2$. Zároveň je tato dvojice úseček hledaná spojnice bodů x a y.

Pokud by každá dvojice protínala množinu $\mathbb{Q}^2$, znamenalo by to, že dvojic úseček je jen spočetně, což je spor.

2 Vzorová písemka

1. Uvažujte posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$f_n(x) = \sqrt{n+1}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{nx}}} - 1\right), \qquad \text{pro } x \in (0,\infty), n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Nalezněte funkci $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ splňující $f_n \to f(x) =$ na $(0,\infty)$.
   (b) Rozdhoněte, zda $f_n \rightrightarrows f(x) =$ na $(0,1]$.
   (c) Rozdhoněte, zda $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x) =$ na $(0,1]$.
   (d) Rozdhoněte, zda $f_n \rightrightarrows f(x) =$ na $[1,\infty)$.
   (e) Rozdhoněte, zda $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x) =$ na $[1,\infty)$.

2. Nechť je f definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n)$$

   Určete definiční obor funkce f. Rozhodněte, zda na tomto definičním oboru řada konverguje stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně. Vyšetřete spojitost funkcí f a f' v jejich definičním oboru.

① $f_n = \sqrt{n+1}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{nx}}} - 1\right) \quad x \in (0,\infty)$

(a) fix $x \in (0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{e^{\sqrt{\frac{1}{nx}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{nx}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{nx}}}_{\frac{\sqrt{n}\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(b) fix $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_n = \sup\{ |f_n - f|,\ x \in (0,1]\}$$

$$g_n = f_n - f = \sqrt{n+1}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}} - 1\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

pro $x \to 0$: $$\lim_{x\to 0} g_n = \lim_{x\to 0} \underbrace{e^{\frac{1}{\sqrt{xn}}}}_{\text{"}e^{\infty}\text{"}} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\ e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}}}}_{\text{"}\frac{1}{\infty}=0\text{"}}\right)$$

$$= \infty$$

tedy $\tau_n = \infty$, tedy $\lim \tau_n \not\to 0$ tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ na $(0,1]$

(c) fix $n \in \mathbb{N}$

$$g_n'(x) = \sqrt{n+1}\ e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \sqrt{\frac{n+1}{n}}\ e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}}\right)}_{\leq 0}$$

$\frac{n+1}{n} \geq 1 \to \sqrt{\frac{n+1}{n}} \geq 1$

$\frac{1}{\sqrt{nx}} > 0 \to e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}} > 0$

$\sqrt{\frac{n+1}{n}}\ e^{\frac{1}{\sqrt{nx}}} > 1$

tedy g_n je klesající na $(0,\infty)$

pak máme

$$\sigma_n = \sup\{|g_n|, x \in (a,1]\} \qquad a > 0$$

$$= g_n(a)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} g_n(a) = 0 \qquad \text{(z bod. konvergence)}$$

tedy $\quad f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \quad$ na $(0,1]$

(d) $\sigma_n = \sup\{|g_n|, x \in [1,\infty)\}$

$$= g_n(1) \qquad \text{(z derivace a monotonie)}$$

$\to \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim g_n(1) = 0 \qquad$ (viz bod. konvergenci)

$\to \quad f_n \rightrightarrows f \quad$ na $[1,\infty)$

(e) z (d) plyne i

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } [1,\infty)$$

(2) $f = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(x^n)$

- $x \in [-1,1]$ (kvůli arcsin)

Nutná podmínka: $x \neq \pm 1 \Rightarrow x \in (-1,1)$

LSK s x^n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\arcsin(x^n)|}{|x^n|} = 1 \in (0,\infty)$$

Heine $y_n = x^n \rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$

$\sum |x^n|$ K pro $x \in (-1,1) \Rightarrow \sum \arcsin x^n$ AK

$\rightarrow \underline{\underline{x \in (-1,1)}}$

- $f_n' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot n x^{n-1} \quad x \in (-1,1) \qquad f_n$ spoj na $(-1,1)$

$x_0 = 0$ pak $f(x_0) = \sum 0$ K

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}} \rightrightarrows ?$$

$$f_n'' = \frac{n(n-1)x^{n-2}\sqrt{1-x^{2n}} - n x^{n-1} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot (-2n x^{2n-1})}{(\sqrt{1-x^{2n}})^2}$$

$$= \frac{n}{(\sqrt{1-x^{2n}})^2} \cdot \frac{(1-x^{2n})(n-1)x^{n-2} + n x^{3n-2}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$$

pro $x > 0$ je $f_n'' > 0 \qquad f' > 0$

• navíc: arcsin x je lichá

x^n $\begin{cases} n \text{ sudé} & \text{sudá} \\ n \text{ liché} & \text{lichá} \end{cases}$ $\Big\} \Rightarrow$ arcsin x^n $\begin{cases} n \text{ sudé} & \text{sudá} \\ n \text{ liché} & \text{lichá} \end{cases}$

analogicky f_n' $\begin{cases} n \text{ sudé} & \text{lichá} \\ n \text{ liché} & \text{sudá} \end{cases}$

• z parity funkcí plyne
fix n

$$\sigma_n = \sup\{|f_n'(x)| \; x \in (-a,a)\} \quad 0 < a < 1$$

$$= f_n'(a) = \frac{n a^{n-1}}{\sqrt{1-a^{2n}}}$$

$$\sum \underbrace{\frac{n a^{n-1}}{\sqrt{1-a^{2n}}}}_{a_n} \quad \text{k} \quad \text{např. LSK s } \frac{1}{n^2} \text{ a škála}$$

Tedy $\sum f_n' \rightrightarrows$ na $(-a,a)$

A z Vo zejména $\sum a_n$ konv. plyne, že i $\sum f_n \rightrightarrows$ na $(-a,a)$

Protože f_n, f_n' jsou spoj na $(-a,a)$, tak i f a f' jsou spoj na $(-a,a)$. A tedy na $(-1,1)$

• $\sum f_n \not\rightrightarrows$ na $(-1,1)$.

$$\sigma_n = \sup\{|f_n| \, , \; x \in (-1,1)\} = |f_n(1)| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{\pi}{2} \neq 0$$ tedy $\sum$ nesplňuje NP.

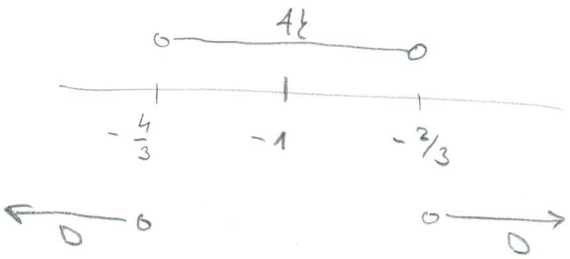
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}_{a_n} (x+1)^n$

střed $x=-1$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{n}} = 3 \Rightarrow R=\frac{1}{3}$

$3^n \le 3^n+2^n \le 2\cdot 3^n$

$\sqrt[n]{3^n}=3$ $\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{3^n}\to 3$ 2 policajti



krajní body: $\boxed{x=-\frac{2}{3}}$

$\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{1}{3^n} = \sum \frac{1+(\frac{-2}{3})^n}{n}$

$\sum \frac{1}{n}$ D $\sum \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ AK

dohromady D+K $\to$ Diverguje

$\boxed{x=-\frac{4}{3}}$

$\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\frac{1}{(-3)^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

K Leibniz konverguje

dohromady K

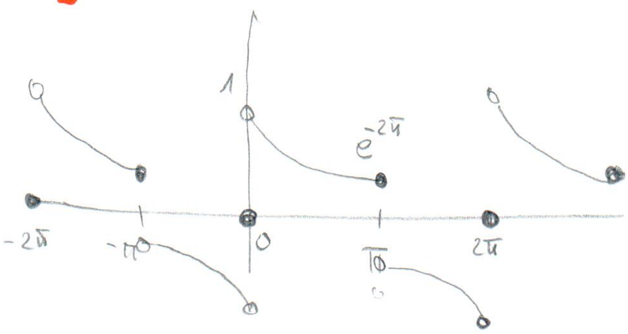
AK? $\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}$ D viz $x=-\frac{2}{3}$

Závěr: $\sum$ AK právě pro $x\in\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ jinak diverguje
NAK — " — $x=-4/3$

(4) $f(t) = e^{-2t}$ $\qquad t \in (0,\pi]$

rozšíříme liše:

$g(t) \to$



FZ: $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2t} \sin(nt)\, dt$$

$$\int_0^{\pi} \underset{u}{e^{-2t}}\ \underset{v'}{\sin(nt)}\, dt = \left[-e^{-2t}\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} \underset{u}{e^{-2t}}\ \underset{v'}{\cos(nt)}\, dt$$

$u' = -2e^{-2t} \qquad v = \frac{-\cos(nt)}{n}$

$u' = -2e^{-2t} \qquad \frac{\sin(nt)}{n}$

$$= \left[-e^{-2\pi}\frac{1}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\right] - \frac{2}{n}\left(\underbrace{\left[e^{-2t}\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi}}_{0} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} e^{-2t}\sin(nt)\right)$$

Tedy $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-2t}\sin(nt)\,dt = \frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}e^{-2\pi}\right) = \frac{n}{n^2+4}\left(1-(-1)^n e^{-2\pi}\right)$

$$s^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\pi}\frac{1}{n^2+4}\left(1-(-1)^n e^{-2\pi}\right)\sin(nx)$$

Funkce $g(t)$ má konečnou variaci na $[-\pi,\pi]$ (je po částech monot. a omezená), $V(g,-\pi,\pi) = 1e^{2\pi} + 1 + 1 + (1-e^{-2\pi}) = 3$

konverguje k funkci $\begin{cases} g(t) & \text{na } (0,\pi) + 2k\pi,\ (-\pi,0) + 2k\pi \\ 0 & \text{na } t = 0 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

pro $t = \frac{\pi}{2}$ máme

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2+4} \left(1 - (-1)^n e^{-2\pi}\right) \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \ \ldots \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(2n+1)}{4+(2n+1)^2} \left(1 + (-1)^1 e^{-2\pi}\right) (-1)^n$$

tedy $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4+(2n+1)^2} (-1)^n = \frac{\pi e^{-\pi}}{2\left(1-e^{-2\pi}\right)}$$