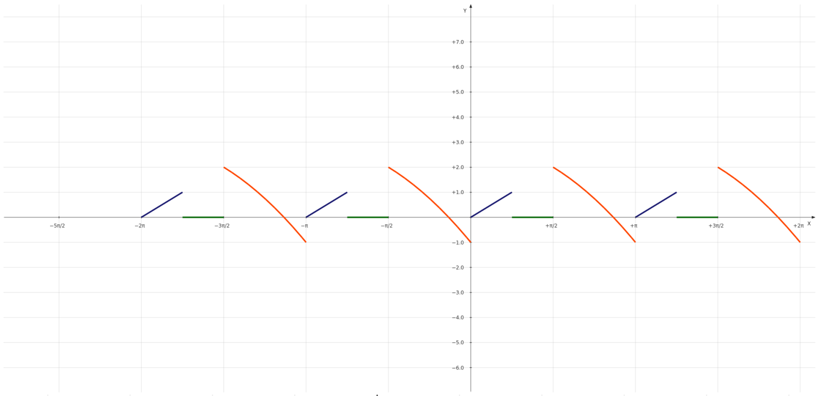
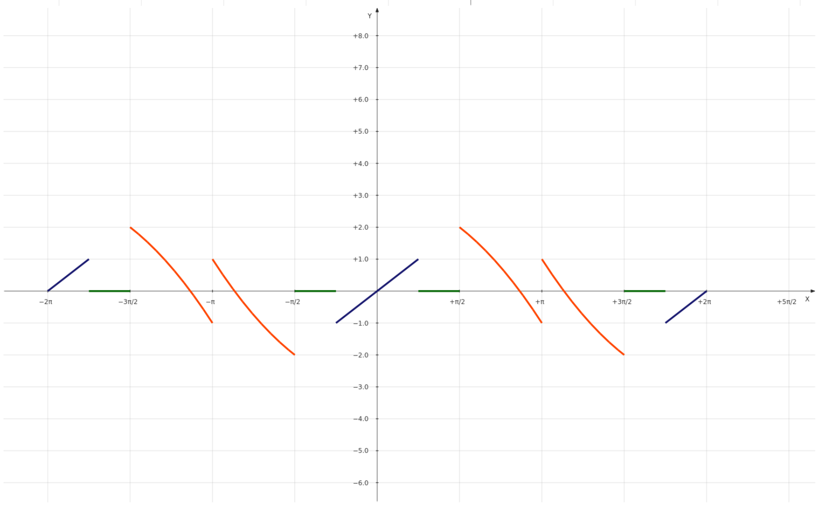
11. cvičení - Fourierovy řady 2

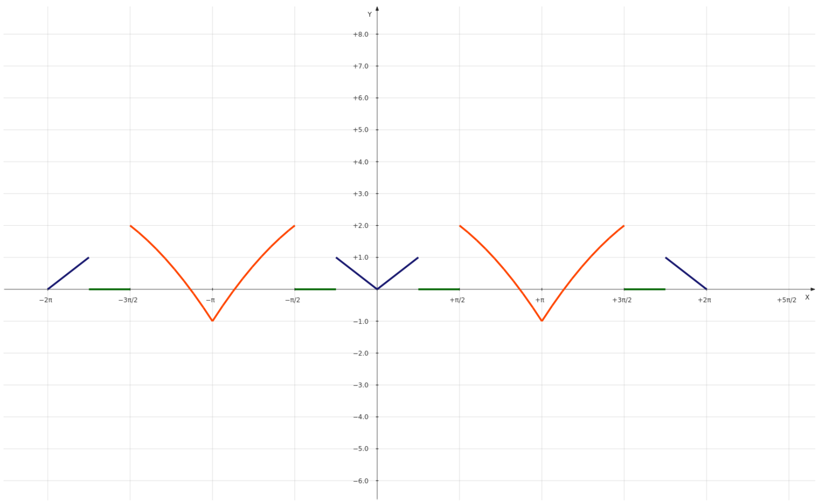
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Dokreslete funkci na π-periodickou, 2π-periodickou lichou a 2π-periodickou sudou:







2. Rozviňte funkci do sinové/kosinové Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet. Určete pak součet číselných řad.

   (a) Sinovou i kosinovou $f(x) = x$ na $[0, \pi)$

   Řešení: Pro sinovou řadu máme

   - Liché rozšíření, dostáváme funkci x na $(-\pi, \pi)$.
   - Máme $V(f, -\pi, \pi) = 4\pi$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
   - Funkce f je lichá, tedy $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pro b_n máme

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cdot \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}
$$

   - Fourierova řada je pak tvaru

$$
s^f = \sum_{n=1}^\infty 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)
$$

   - Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$
s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.
$$

   Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

   Kosinová řada

   - Sudé rozšíření, dostáváme funkci $|x|$ na $(-\pi, \pi)$.
   - Máme $V(f, -\pi, \pi) = 4\pi$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
   - Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro a_n máme

$$
a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \pi
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cdot \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)
\end{aligned}
$$

   - Fourierova řada je pak tvaru

$$
s^f = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\cos(nx)
$$

   - Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$
s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.
$$

   Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

(b) ❀ Kosinovou řadu $f(x) = e^x$ na $[0, \pi)$

- Sudé rozšíření, dostáváme funkci $e^{|x|}$ na $(-\pi, \pi)$.
- Funkce je po částech monotónní na $(-\pi, \pi)$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[e^x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(e^\pi - 1)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x$$

Dvakrát integrací per partes vyjde

$$\begin{aligned} \int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{n} e^x \sin nx - \frac{1}{n} \int e^x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} e^x \sin nx + \frac{1}{n^2} e^x \cos nx - \frac{1}{n^2} \int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{n} e^x \sin nx + \frac{1}{n^2} e^x \cos nx$$

$$\int e^x \cos nx \, \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{n}{1+n^2} e^x \sin nx + \frac{1}{1+n^2} e^x \cos nx = \frac{e^x}{1+n^2} \left(n \sin nx + \cos nx\right)$$

Tedy

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{e^x}{1+n^2} \left(n \sin nx + \cos nx\right)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi(1+n^2)} \left(e^\pi (-1)^n - 1\right)$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1+n^2)} \left(e^\pi (-1)^n - 1\right) \cos(nx)$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

(c) ❀ Kosinovou řadu $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$$

Řešení:

- Sudé rozšíření, dostáváme funkci $|\sin x|$ na $\mathbb{R}$.
- Funkce je po částech monotónní na $(-\pi, \pi)$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.

- Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

Lze řešit dvojnásobným per partes, přes komplexní exponencielu nebo ze vzorce. Tedy pro $n > 1$ je

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(x-nx)+\sin(x+nx))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(x(1-n))+\sin(x(1+n))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(x(1-n))}{1-n}-\frac{\cos(x(1+n))}{1+n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(\pi(1-n))}{1-n}-\frac{\cos(\pi(1+n))}{1+n}+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n}+\frac{(-1)^n}{1+n}+\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ liché}, \\ = \frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \text{ sudé}, \end{cases}
\end{aligned}$$

Pro $n = 1$ máme

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^\pi = 0.$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi,\pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi,\pi)$.

- Dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

(d) ❄ Sinovou řadu $f(x)=\cos(ax)$, $a>0$ na $[0,\pi)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2}-4$

Řešení:

- Liché rozšíření.
- Funkce je po částech monotónní na $(-\pi,\pi)$, tedy $f\in BV[-\pi,\pi]$.
- Funkce f je lichá, tedy $a_n=0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}_0$. Pro b_n máme

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(ax)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

Lze řešit dvojnásobným per partes, přes komplexní exponencielu nebo ze vzorce. Zafixujme $n\in\mathbb{N}$. Pak pro $a\neq n$ máme

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(ax)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{4\pi i}\int_0^\pi (e^{iax}+e^{-iax})(e^{inx}-e^{-inx})\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\pi e^{ix(a+n)}-e^{ix(a-n)}+e^{ix(n-a)}-e^{-ix(n+a)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{ix(a+n)}}{i(a+n)}-\frac{e^{ix(a-n)}}{i(a-n)}+\frac{e^{ix(n-a)}}{i(n-a)}-\frac{e^{-ix(n+a)}}{-i(n+a)}\right]_0^\pi\\
&=\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\frac{e^{i\pi(a+n)}}{i(a+n)}-\frac{e^{i\pi(a-n)}}{i(a-n)}+\frac{e^{i\pi(n-a)}}{i(n-a)}-\frac{e^{-i\pi(n+a)}}{-i(n+a)}\\
&\qquad-\frac{1}{i(a+n)}+\frac{1}{i(a-n)}-\frac{1}{i(n-a)}+\frac{1}{-i(n+a)}\Bigg)\\
&=\frac{1}{-2\pi}\Bigg(\frac{\cos(\pi(a+n))+i\sin(\pi(a+n))}{(a+n)}-\frac{\cos(\pi(a-n))+i\sin(\pi(a-n))}{(a-n)}\\
&\qquad+\frac{\cos(\pi(n-a))+i\sin(\pi(n-a))}{(n-a)}-\frac{\cos(\pi(a+n))-i\sin(\pi(a+n))}{-(a+n)}\\
&\qquad+\frac{4n}{a^2-n^2}\Bigg)\\
&=\frac{1}{-2\pi}\left(\frac{2\cos(\pi(a+n))}{a+n}+\frac{2\cos(\pi(n-a))}{n-a}+\frac{4n}{a^2-n^2}\right)
\end{aligned}$$

Pro $a=n$ máme

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2nx\,\mathrm{d}x=0.$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1,n\neq a}^{\infty}\left(\frac{\cos(\pi(a+n))}{a+n}+\frac{\cos(\pi(n-a))}{n-a}+\frac{2n}{a^2-n^2}\right)\sin(nx)$$

Ekvivalentní výsledek:

$$s^f=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1,n\neq a}^{\infty}\frac{n}{a^2-n^2}((-1)^n\cos(a\pi)-1)\sin(nx)$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

- Dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$ a $a = 2$:

$$\begin{aligned} -1 = \cos\pi &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} \left(\frac{\cos(\pi(2+n))}{2+n} + \frac{\cos(\pi(n-2))}{n-2} + \frac{2n}{2^2 - n^2} \right) \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2+n} + \frac{(-1)^n}{n-2} - \frac{2n}{n^2-4} \right) \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 2}^{\infty} \left(\frac{2n(-1)^n - 2n}{n^2-4} \right) \sin(n\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{(2n+1)^2 - 4} \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^n}{(2n+1)^2-4} = -\frac{\pi}{4}$$

(e) Kosinovou řadu $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ na $[0, \pi)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$

(f) ★ Kosinovou řadu

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

(g) Sinovou řadu $f(x) = \cos 2x$ na $[0, \pi)$

3. Parsevalova rovnost:

   (a) Funkce $f(x) = x$ na $[-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

   (b) Funkce $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

   (c) Funkce $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ na $[-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

4. Rozviňte funkci do (sinové, kosinové, obyčejné) Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

   (a) sinová řada: $f(x) = \cos(ax)$, $a > 0$, $\in [0, \pi)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2 - 4}$

   (b) kosinová řada: $f(x) = \operatorname{sign}(\sin(3x))$, $x \in [0, \pi)$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$

5. ❀ Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.
   Návod: Rozviňte funkci $\chi_{[-\alpha,\alpha]}$.
6. Zkouškové písemky doc. Rokyty:
   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/
   (a) Funkce $f(x) = \cos 3x$ na $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, $f(x) = 0$ jinde na $(-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.
   (b) ❄ $f(x) = \sinh ax$ na $[0, \pi)$, $a > 0$. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny. Tuto řadu spočtěte. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

Bonus

7. ✿ Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $f(x)$ vyjádřete koeficienty posunuté funkce $g(x) = f(x + h)$, $h > 0$.
8. ♡ Nechť f je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Ukažte, že platí
   (a) Je-li f periodická s periodou π, tedy $f(x) = f(x + \pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Je-li f antiperiodická s periodou π, tedy $-f(x) = f(x + \pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.
9. ❄ Nechť f je 2π-periodická funkce, nechť navíc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ukažte, že
   (a) jestliže $a_k = 0$ pro $\forall k \geq 0$, pak $f(x)$ je lichá;
   (b) jestliže $b_k = 0$ pro $\forall k \geq 1$, pak $f(x)$ je sudá.

Nyní uvažujme $a = 2$ a $x = \frac{\pi}{2}$, pak máme

$$\begin{aligned} -1 = \cos\pi &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1,n\neq 2}^{\infty}[(-1)^n - 1]\sin n\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)(-1)^k(2k+1)}{4-(2k+1)^2} \\ &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4} = -\frac{\pi}{4}.$$

♣

2E

16.7.6. Příklad. Rozviňte funkci

$$f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0,\pi],$$

do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$, která obsahuje pouze členy s $\cos nx$. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součet číselné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}.$$

Řešení. Uvažujme sudé 2π-periodické rozšíření f na R, tj. funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \big((-\pi,-\frac{2}{3}\pi)\cup(-\frac{\pi}{3},0)\cup(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{2}{3}\pi,\pi)\big) + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{3}k, k\in\mathbb{Z}, \\ -1, & x \in \big((-\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi)\big) + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dle Věty 16.4.3 konverguje Fourierova řada g k funkci

3D

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k\in\mathbb{Z}, \\ g(x), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spočtěme koeficienty této řady. Jelikož je g sudá, platí $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{4}{\pi n}\left(\sin(\frac{n\pi}{3}) - \sin(\frac{2n\pi}{3})\right). \end{aligned}$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 = h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

♣

16.7.7. Příklad. Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in ¶([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty **??** platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Řešení: Na intervalu $\langle -\pi, 0)$ jsou části integrálů pro koeficienty a_n, b_n nulové.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\cos\, x\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, x \cos\, nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin\,(1+n)x - \sin\,(1-n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos\,(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos\,(1-n)x}{1-n}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)$$

Pro $n > 1$ platí:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, x \sin\, nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \cos\,(1-n)x - \cos\,(1+n)x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\,(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin\,(1+n)x}{1+n}\right]_0^\pi = 0$$

Koeficient b_1 musíme spočítat odděleně: :

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 1 - \cos\, 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \sin\, 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}$$

Fourierova řada má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\, x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{1+n}\right)\cos\, nx =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\, x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\, 2nx}{4n^2-1}$$

Podle Dirichletovy věty je součet této řady roven $f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.

28) **Příklad 6.** Rozložte v kosinovou Fourierovu řadu funkci:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\, x, & x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle \\ -\cos\, x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle. \end{cases}$$

Řešení:

Protože rozkládáme v kosinovou řadu, jsou všechny koeficienty b_n nulové.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\, x \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\, x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[\sin\, x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin\, x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \underline{\frac{4}{\pi}}$$

sudá kopie $f \in BV(\langle 0, 2\pi])$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos nx \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos{(1+n)x} +$$

$$+ \cos{(1-n)x} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos{(1+n)x} + \cos{(1-n)x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin{(1+n)x}}{1+n} + \frac{\sin{(1-n)x}}{1-n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin{(1+n)x}}{1+n} + \frac{\sin{(1-n)x}}{1-n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{pro } n \text{ liché} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k+2 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-n^2}, & \text{pro } n = 4k \end{cases}$$

Tento zápis lze sjednotit do jediného:

$$a_n = \frac{2}{\pi}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{1}{1-n^2}$$

Pak tedy, protože funkce je spojitá, platí podle Dirichletovy věty na celém intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\left((-1)^n + 1\right)\frac{\cos nx}{1-n^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{1-n^2}$$

2g

Příklad 7. Rozložte v sinovou Fourierovu řadu funkci $f(x) = \cos 2x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení:

Protože rozkládáme v sinovou řadu, všechny koeficienty a_n jsou nulové.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin{(2+n)x} + \sin{(n-2)x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos{(n+2)x}}{n+2} - \frac{\cos{(n-2)x}}{n-2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{n+2} + \frac{(-1)^{n+1}+1}{n-2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((-1)^{n+1}+1\right)\frac{n+2+n-2}{n^2-4} = \frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2-4}$$

Protože funkce je spojitá, podle Dirichletovy věty platí na celém intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

Lichá [illegible] je [illegible]

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin 2x \, dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 4x \, dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\left((-1)^{n+1}+1\right)\sin nx}{n^2-4} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)^2-4}\sin(2n+1)x$$

Příklad 8. Rozviňte ve Fourierovu řadu na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ funkci

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & x \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & x \in \langle 0, \pi) \,. \end{cases}$$

Řešení:

Jde o lichou funkci, tedy všechny její koeficienty a_n jsou nulové. Spočteme koeficienty b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x)\sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \text{použiji metodu per partes} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\pi\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}$$

Podle Dirichletovy věty řada konverguje pro všechna $x \in (-\pi, \pi)$

kromě $x = 0$ k zadané funkci:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Příklad 9. Funkci $f(x) = \pi^2 - x^2$ rozložte ve Fourierovu řadu na intervalu $(-\pi, \pi)$. Najděte součty řad:

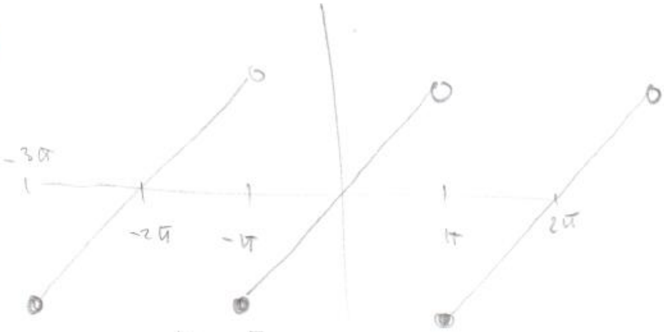
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Řešení:

Jde o sudou funkci, tedy všechny její koeficienty b_n jsou rovny nule. Spočtu koeficienty a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\pi^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[x\pi^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi^2$$

3a $f(x) = x \,, \quad x \in [-\pi, \pi)$



f lichá $\to a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx)\, dx$$

Per partes

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) \right) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$F_f = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin(nx)$$

Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 1}{n^2}$$

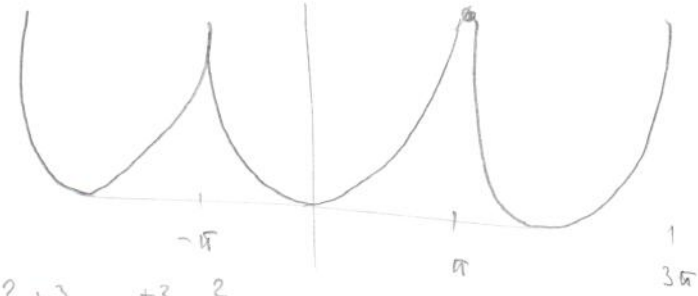
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = 4\pi \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$3b$ $f(x) = x^2 \qquad x \in [-\pi, \pi)$



f suda' $\rightarrow$ $b_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \pi^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin(nx) + \frac{2x}{n^2} \cos(nx) - \frac{2}{n^3} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

2x per partes

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n^2} \pi \cos(n\pi) - \frac{2 \cdot (-\pi)}{n^2} \cos(-n\pi) \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$F_f = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 4}{n^2} \cos(nx)$$

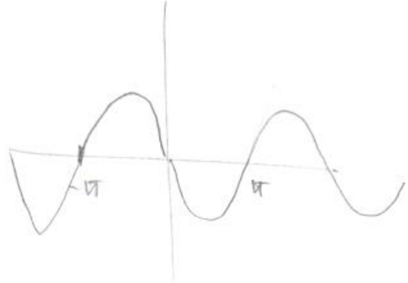
Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{5} \pi^5 \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{2}{5} \pi^4 = \frac{2}{9} \pi^4 + 16 \sum \frac{1}{n^4} \rightarrow \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

3c $f(x) = x^3 - \pi^2 x \qquad x \in [-\pi, \pi)$



f liscia $\to \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^3 - \pi^2 x)\sin(nx) =$$

3x per partes

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{6x}{n^3} + \frac{\pi^2 x - x^3}{n}\right)\cos(nx) + \left(\frac{3x^2 - \pi^2}{n^2} - \frac{6}{n^4}\right)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{6\pi}{n^3} + \frac{\pi^3 - \pi^3}{n}\right)\cos(n\pi) - \left(\frac{-6\pi}{n^3} + \frac{-\pi^3 + \pi^3}{n}\right)\cos(n(-\pi))\right] =$$

$$= \frac{12\pi}{n^3 \pi}(-1)^n = \frac{12}{n^3}(-1)^n$$

$$F_f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$$

Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x^3 - \pi^2 x)^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(12)^2}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{2\pi^2 x^5}{5} + \frac{\pi^4 x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{16}{105}\pi^6 = 144\sum \frac{1}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

Tedy

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \in \{6k, 6k+1, 6k+3, 6k+5\}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\frac{4\sqrt{3}}{\pi n}, & n = 6k+4, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Proto má Fourierova řada funkce g tvar

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} \cos(6k+2)x - \frac{1}{6k+4} \cos(6k+4)x \right).$$

Pro $x = 0$ máme

$$\begin{aligned} 1 = h(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6k+2} - \frac{1}{6k+4} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

♣

2 **16.7.7. Příklad.** Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

Řešení. Uvažujme funkci $f(x) = \chi_{[-\alpha,\alpha]} \in ¶([-\pi, \pi])$ a rozviňme ji do Fourierovy řady. Máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi}$$

a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Díky sudosti funkce f jsou pak všechny koeficienty b_n nulové.

Podle Věty ?? platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi (a_n^2 + b_n^2).$$

Tedy dostáváme

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4\alpha^2}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi \frac{4 \sin^2 n\alpha}{n^2 \pi^2},$$

z čehož plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

Dále platí dle Příkladu ?? vztah

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2},$$

z kterého plyne rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

♣

5a

4. [7b] Mějme $f(x) = \cos 3x$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6} \rangle$ a $\langle \frac{\pi}{6}, \pi \rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Napište Parsevalovu rovnost a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx = \left[\frac{2}{3\pi} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3\pi},$$

a dále

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos nx \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos(3+n)x + \cos(3-n)x \big) \, dx.$$

Je vidět, že výpočet bude vypadat jinak pro $n = 3$ a jinak pro $n \neq 3$. Pro $n = 3$ máme

$$\pi a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos 6x + 1 \big) \, dx = \frac{1}{6} \Big[\sin 6x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6},$$

zatímco pro $n \neq 3$ je

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \frac{1}{3+n} \Big[\sin(3+n)x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3-n} \Big[\sin(3-n)x \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\ &= \frac{1}{3+n} \sin(3+n)\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3-n} \sin(3-n)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3+n} \cos n\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3-n} \cos n\frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{6}{\pi(9-n^2)} \cos n\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6} \cos nx}{9-n^2},$$

a protože zadaná funkce je po částech C^1 s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{9\pi^2} + \frac{1}{36} + \frac{36}{\pi^2} \sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2},$$

případně:

$$\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2} = \frac{5\pi^2}{1296} - \frac{1}{162}.$$

5b

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

   1. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.
   2. Spočtěte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sinh ax \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx\,,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočtěme nejprve

$$\int_0^{\pi} e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{a + in}\left(e^{a\pi}\, e^{in\pi} - 1\right) = \frac{a - in}{a^2 + n^2}\left(e^{a\pi}\,(-1)^n - 1\right)\,,$$

tedy

$$\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2 + n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}\right)\,.$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{-ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2 + n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}\right)\,,$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\pi} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{a^2 + n^2}\left[1 - 1 + (-1)^{n+1}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\right] = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi\,\frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2}\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2}\sin nx\,,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji $\tilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2}\,. \tag{2}$$

Protože (spočtěte si) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)$, $(a \neq 0\,!)$ dostaneme konečně:[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\sinh^2 a\pi}\left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)\,, \quad a \neq 0\,. \tag{3}$$

[2] Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim_{a \to 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odůvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)

$$= -\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 5x$$

V tomto případě $b_1 = -\frac{1}{2}, b_5 = \frac{1}{2}$ a ostaní koeficienty jsou nulové.

(b)

$$\cos^4 x = \left(\text{použiji vztah } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) = \left(\text{použiji stejný vztah pro } \cos^2 2x\right) =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

V tomto případě $a_0 = \frac{3}{4}, a_2 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{8}$ a ostatní koeficienty jsou nulové.

U tohoto příkladu vidíme, že ne vždy je třeba počítat Fourierovy koeficienty přes integrály. Pokud mám součet, součin či mocninu goniometrických funkcí, je někdy možné použitím vztahů, které pro ně platí, převést funkci na lineární kombinaci funkcí $\cos nx, \sin nx$. Získáme tak vlastně Fourierovu řadu dané funkce s konečným počtem nenulových koeficientů.

Příklad 2. Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $y = f(x)$ vyjádřete koeficienty a'_n, b'_n posunuté funkce $y = g(x) = f(x + h)$, kde $h > 0$ je kladná konstanta.

Řešení:

Původní funkce je $y = f(x)$, její koeficienty jsou

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Funkce $y = f(x+h)$ má koeficienty

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro kosinus rozdílu})$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$

(nyní využiji toho, že platí: $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi+h} - \int_{-\pi}^{-\pi+h} = \int_{-\pi}^{-\pi}$,

protože z toho důvodu, že funkce má periodu 2π, mají druhý

a třetí člen opačnou velikost, takže se odečtou)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh + \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$

$$= \underline{a_n\cos nh + b_n\sin nh}$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\sin nx\,\mathrm{d}x = (\text{použiji substituci } t = x+h) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin(nt-nh)\,\mathrm{d}t = (\text{použiji vzorec pro sinus rozdílu})$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$

(upravím meze jako u koeficientů a_n :)

$$= \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\right]\cos nh - \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\right]\sin nh =$$

$$= b_n\cos nh - a_n\sin nh$$

7 **Příklad 3.** Nechť $y = f(x)$ je funkce integrovatelná na $\langle -\pi, \pi\rangle$. Dokažte, že pro koeficienty a_k, b_k Fourierovy řady funkce f platí:

(a) Je-li f periodická s periodou π, tj. $f(x) = f(x+\pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

(b) Je-li f tzv. antiperiodická s antiperiodou π, tj. $f(x+\pi) = -f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Řešení:

7a

(a)

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$

$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos(2k-1)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a}$$

$$\text{využiji, že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,[\cos(2k-1)x\,\cos(2k-1)\pi$$

$$-\sin(2k-1)x\,\sin(2k-1)\pi]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$

$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin(2k-1)(x+\pi)\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a}$$

$$\text{využiji, že že platí } f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,[\sin(2k-1)x\,\cos(2k-1)\pi$$

$$+\cos(2k-1)x\,\sin(2k-1)\pi]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x = 0$$

(b)

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$

$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos{(2k)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro kosinus součtu a}$$

$$\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\cos{(2k)x}\ \cos{(2k)\pi}\right.$$

$$\left.+\sin{(2k)x}\ \sin{(2k)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos{(2k)x}\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_{2k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{u prvního integrálu provedu substituci}$$

$$x = x+\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin{(2k)(x+\pi)}\,\mathrm{d}x +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = (\text{použiji vztah pro sinus součtu a}$$

$$\text{využiji, že platí } -f(x) = f(x+\pi)) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\left[\sin{(2k)x}\ \cos{(2k)\pi}\right.$$

$$\left.+\cos{(2k)x}\ \sin{(2k)\pi}\right]\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin{(2k)x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Příklad 4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Pro která x nalezená řada konverguje a jaký je její součet? Pomocí výsledku určete součet nekonečné řady

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

8

f 2π - period, $C^1(\mathbb{R})$

- $a_k = 0 \quad \forall k \geq 0 \rightarrow f(x)$ lichá
- $b_k = 0 \quad \forall k \geq 1 \rightarrow f(x)$ sudá

- $a_k = 0$
- $g(x) = f(x) + f(-x)$

Pro F_g: $$a_k^g = \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)}_{a_k^f} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos(k(-x))\,dx}\Bigg)$$

$y = -x \quad dy = -1\,dx$

$$-\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\cos(-ky)\,dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,dy = a_k^f$$

$$= 0 + 0$$

$$a_0^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\,dx = 0 + 0$$

$y = -x$

$$b_k^g = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin(kx)\,dx}_{} = b_k^f - b_k^f = 0$$

$y = -x \quad dy = -1\,dx$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(y)\sin(-ky)\,dy = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,dy$$

$$= -b_k^f$$

$\rightarrow \forall$ koef $= 0$, $f(x)$ i $f(-x)$ je C^1 $\rightarrow F_g \rightarrow f \rightarrow$

$0 = f(x) + f(-x) \rightarrow$ $\boxed{f \text{ lichá}}$

- $b_k = 0$ stejně