11. cvičení - Fourierovy řady 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Parsevalova rovnost)**.** Nechť f je definována na $[-\pi, \pi]$ a $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

Definice 2. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce taková, že $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N},$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f.*

Řadu

$$\mathcal{S}f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f.* Píšeme $\mathcal{S}f \sim f$.

($\mathcal{S}_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, jde o částečné součty.)

Fakta

Pro $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x = 0,\ \ m,n \geq 1, \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,\mathrm{d}x \quad = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Hinty

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

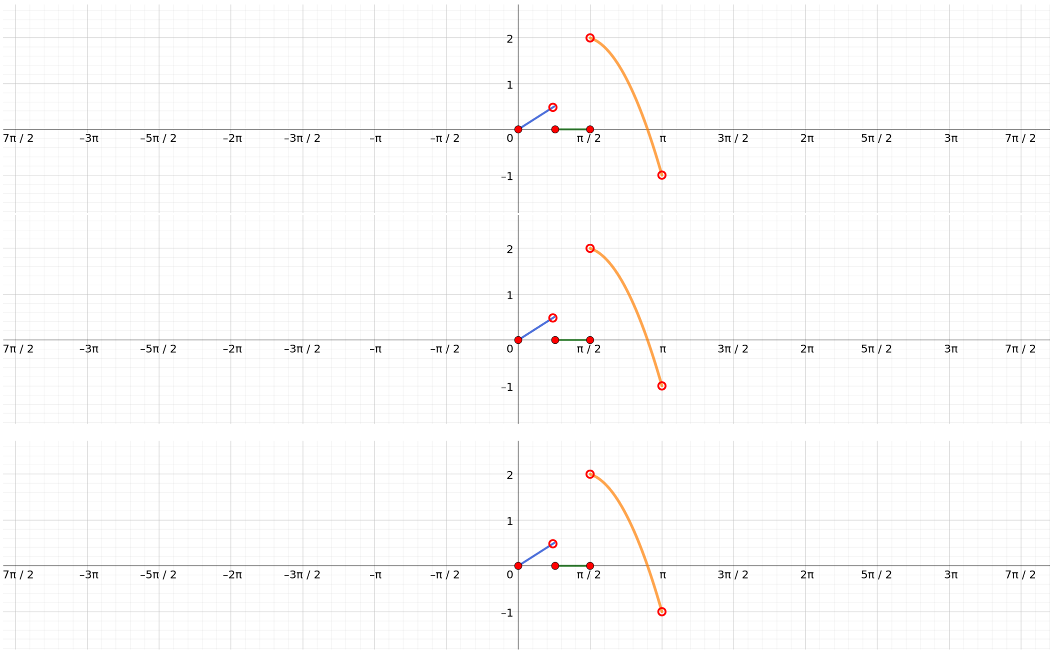
$$\sin(nx) = \operatorname{Im} e^{inx} = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad \cos(nx) = \operatorname{Re} e^{inx} = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

Algoritmus pro sinové/kosinové řady

1. Načrtneme funkci a uděláme její **lichou/sudou kopii**. Až **pak rozšíříme** 2π-periodicky.
2. Spočteme a_0, a_n, b_n (dáváme pozor na **podmínky**). Funkce je **sudá/lichá**.
3. Sestavíme **Fourierovu řadu**.
4. Zkontrolujeme původní funkci. Je spojitá? Je BV? Je C^1? Z vět pak vyplyne **konvergence** Fourierovy řady.

Příklady

1. Dokreslete funkci na π-periodickou, 2π-periodickou lichou a 2π-periodickou sudou:



2. Rozviňte funkci do sinové/kosinové Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje na $\mathbb{R}$ a určete její součet. Určete pak součet číselných řad.
   (a) Sinovou i kosinovou $f(x) = x$ na $[0, \pi)$
   (b) ❀ Kosinovou řadu $f(x) = e^x$ na $[0, \pi)$
   (c) ❁ Kosinovou řadu $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$$
   (d) ❄ Sinovou řadu $f(x) = \cos(ax)$, $a > 0$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2} - 4$$
   (e) Kosinovou řadu $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ na $[0, \pi)$
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$$
   (f) ★ Kosinovou řadu
   $$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos x, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$
   (g) Sinovou řadu $f(x) = \cos 2x$ na $[0, \pi)$
3. Parsevalova rovnost:
   (a) Funkce $f(x) = x$ na $[-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

(b) Funkce $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

(c) Funkce $f(x) = x^3 - \pi^2 x$ na $[-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

4. ❀ Pro $\alpha \in [0, \pi]$ sečtěte řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$.

   Návod: Rozviňte funkci $\chi_{[-\alpha,\alpha]}$.

5. Zkouškové písemky doc. Rokyty:
   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

   (a) Funkce $f(x) = \cos 3x$ na $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, $f(x) = 0$ jinde na $(-\pi, \pi)$, pak je 2π-periodická. Najděte její Fourierovu řadu a aplikujte Parsevalovu rovnost.

   (b) ❄ $f(x) = \sinh ax$ na $[0, \pi)$, $a > 0$. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny. Tuto řadu spočtěte. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

Bonus

6. ✿ Pomocí koeficientů a_n, b_n Fourierovy řady 2π-periodické funkce $f(x)$ vyjádřete koeficienty posunuté funkce $g(x) = f(x + h)$, $h > 0$.

7. ♡ Nechť f je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Ukažte, že platí

   (a) Je-li f periodická s periodou π, tedy $f(x) = f(x + \pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_{2k-1} = b_{2k-1} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Je-li f antiperiodická s periodou π, tedy $-f(x) = f(x + \pi)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak $a_0 = a_{2k} = b_{2k} = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

8. ❄ Nechť f je 2π-periodická funkce, nechť navíc $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ukažte, že

   (a) jestliže $a_k = 0$ pro $\forall k \geq 0$, pak $f(x)$ je lichá;

   (b) jestliže $b_k = 0$ pro $\forall k \geq 1$, pak $f(x)$ je sudá.

(2b) 2x per partes nebo komplex. exponenciela
(2c) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce
(2d) 2x per partes nebo komplex. exponenciela, pozor na podmínky
(2f) 2x per partes nebo komplex. exponenciela nebo vzorce, pozor na podmínky

(4) Parseval. Pak vztahy $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ a

$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(5b) předpis pro sinh + komplexní integrál

(5b) $\cos^2 \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \neq 0$ jen pro $n = 4k + 2$
(6) substituce $y = x + h$, součtové vzorce, periodicita
(7) součtové vzorce
(8) jak vypadá F. řada pro $f(x) \pm f(-x)$?