10. cvičení - Fourierovy řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

   (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

   Řešení:

   - Máme $V(f, -\pi, \pi) = 4$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
   - Funkce f je lichá, tedy $a_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pro b_n máme

   $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} ((-1)^{n+1} + 1)$$

   - Fourierova řada je pak tvaru

   $$s^f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} ((-1)^{n+1} + 1) \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

   - Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

   $$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

   Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, 0)$ a $(0, \pi)$. (Na $[-\pi, \pi$ je lok. stejnoměrná konvergence vyloučena, protože f je tam nespojitá.)

   - Z výše uvedeného dostáváme, že

   $$1 = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

   Odtud

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

   (b) $f(x) = \cos^6 x$, $x \in (-\pi, \pi]$

   Řešení:

   - Máme $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

- Dále ze vzorců $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ a $2\cos a \cos b = (\cos(a-b) + \cos(a+b)$ lze odvodit

$$
\begin{aligned}
\cos^6 x &= \frac{1}{8}(1+\cos 2x)^3 = \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + 3\cos 2x + 3\frac{1}{2}(1+\cos 4x) + \cos 2x \cdot \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}(\cos 2x \cos 4x)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 6x)\right) \\
&= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x
\end{aligned}
$$

- Protože funkce sama je trigonometrickým polynomem, tak Fourierova řada s funkcí splývá (plyne např. z Faktů ze cvičení). Tedy

$$s^f = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x$$

Z Diniho věty navíc plyne

$$f = \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x$$

Máme $V(f, -\pi, \pi) = 4$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$. Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a, b) pro každé $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$

Řešení:

- Máme $V(f, -\pi, \pi) = 2\pi$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

a z per partes

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin nx \,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^\pi\right) = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos nx \,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi\right) = -\frac{1}{n}(-1)^n
\end{aligned}
$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1)\cos(nx) - \frac{1}{n}(-1)^n \sin(nx)$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

(d) $f(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Řešení:

- Máme $V(f, -\pi, \pi) = 2\pi^2$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Funkce f je sudá, tedy $b_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi^2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2x\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-4}{n\pi}\cdot\frac{\pi\cos n\pi}{n} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}
\end{aligned}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

- Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$, tak z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $\mathbb{R}$ je

$$s^f = f(x).$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$.

- Z výše uvedeného dostáváme, že

$$\pi^2 = f(0) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Analogicky

$$0 = f(\pi) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(e) ❄$f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

Řešení:

- Dodefinujme f jako $f((2k+1)\pi) = \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{-\pi})$. Pak máme $V(f, -\pi, \pi) = 2(e^{\pi} - e^{-\pi})$, tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Pro a_n máme

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

Dále označme $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$ a z per partes

$$\begin{aligned} I_n &= [e^x \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}x \\ &= \cos(n\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) + n\left([e^x \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \cos(n\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) - n^2 I_n. \end{aligned}$$

Odtud

$$I_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1 + n^2}$$

a tedy

$$a_n = (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}$$

Analogicky (lze odvodit i z výpočtů výše) vyjde

$$b_n = (-1)^{n+1} n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1 + n^2)}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \cos(nx) + (-1)^{n+1} n \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \sin(nx)$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

- Z výše uvedeného dostáváme

$$1 = f(0) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \cos(n0) + (-1)^{n+1} n \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} \sin(n0)$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = (1 - \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}) \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

(f) ✱$f(x) = \sin(3x) + 4x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$

Řešení:

- Funkce $4x$ je monotónní a funkce $\sin(3x)$ je po částech monotónní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Tedy $f \in BV[-\pi, \pi]$.
- Funkce je lichá, tedy $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.
  Pro b_n máme:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(3x) \sin(nx) \, dx = \begin{cases} 1, & n = 3, \\ 0, & n \neq 3. \end{cases}$$

Dále

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi 4x \sin 3x \, dx = \frac{8}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi + \frac{8}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} \, dx = (-1)^{n+1} \frac{8}{n}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f = \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-\pi, \pi)$.

- Z výše uvedeného dostáváme

$$\sin 3 + 4 = f(1) = \sin 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n.$$

Odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}$$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$

Řešení:

- Máme $V(f,-\pi,\pi)=2$, tedy $f\in BV[-\pi,\pi]$.
- Pro a_n máme

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x=1.$$

Dále

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^\pi=0$$

a

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^\pi=-\frac{(-1)^n-1}{n\pi}$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^\infty -\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\sin nx$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi,\pi]$ je

$$s^f=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0,\pi)$ a $(\pi,2\pi)$.

(h) ✿$f(x)=x^2\ x\in[0,2\pi)$,

Řešení:

- Máme $V(f,0,2\pi)=8\pi^2$, tedy $f\in BV[0,2\pi]$.
- Pro a_n máme

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2.$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{-2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{-2}{n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4\pi}{\pi n^2}-\frac{2}{n^3\pi}\left[\sin nx\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{4}{n^2}\end{aligned}$$

Analogicky pro

$$b_n=-\frac{4\pi}{n}.$$

- Fourierova řada je pak tvaru

$$s^f=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx.$$

- Z Jordan-Dirichletova kritéria pak plyne, že na $[-\pi, \pi]$ je

$$s^f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Navíc $s_n^f \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(0, 2\pi)$.

2. Zkouškové písemky doc. Rokyty:

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

(a) ♡ $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

(b) ❄ $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $f(x) = x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$, je sudá a 2π-periodická.
Rozviňte funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a jak (konverguje stejnoměrně?). Dosaďte $x = \frac{\pi}{2}$ a sečtěte příslušnou číselnou řadu.

3. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

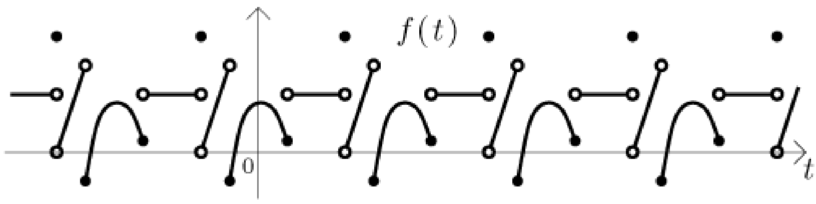

Figure 1: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3f.htm

4a

---

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos\frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.
   3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá a na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ se rovná funkci $\cos\frac{x}{2}$. Proto

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi}\,,$$

a (v první rovnosti využijeme $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos x\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \cos x\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\,dx = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1}\sin x\Big(n+\frac{1}{2}\Big) + \frac{2}{2n-1}\sin x\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2n+1}\underbrace{\sin\pi\Big(n+\tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^n} + \frac{2}{2n-1}\underbrace{\sin\pi\Big(n-\tfrac{1}{2}\Big)}_{=(-1)^{n+1}}\right) = \\ &= \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{(-2)}{4n^2-1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,. \end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech", a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Dosazení bodu $x = \pi$ dává

$$0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}(-1)^n\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n^2$) dává:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2}\,,$$

tedy po úpravě

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\,.$$

4b

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0, \pi \rangle$, $a > 0$.

1. Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.
2. Spočtěte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
3. Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sama o sobě lichá na $\langle -\pi, \pi \rangle$, není proto nutno ji nijak modifikovat. Z lichosti dostáváme

$$a_0 = a_n = 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sinh ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx\,,$$

s využitím vlastností komplexní exponenciely. Spočtěme nejprve

$$\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{1}{a + in}\left(e^{a\pi}\, e^{in\pi} - 1\right) = \frac{a - in}{a^2 + n^2}\left(e^{a\pi}\,(-1)^n - 1\right)\,,$$

tedy

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2 + n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{a\pi}\right)\,.$$

Pouhou záměnou $(-a)$ za a dostaneme

$$\mathrm{Im}\int_0^\pi e^{-ax}\, e^{inx}\, dx = \frac{n}{a^2 + n^2}\left(1 + (-1)^{n+1} e^{-a\pi}\right)\,,$$

a tedy

$$b_n = \frac{2}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\pi \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\, e^{inx}\, dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{a^2 + n^2}\left[1 - 1 + (-1)^{n+1}(e^{a\pi} - e^{-a\pi})\right] = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi\,\frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2}\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{2}{\pi}\sinh a\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{a^2 + n^2} \sin nx\,,$$

a protože zperiodizovaná $\sinh ax$ (označme ji $\tilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$) dává:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\sinh a\pi\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2}\,. \tag{2}$$

Protože (spočtěte si) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh^2 ax\, dx = \left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)$, $(a \neq 0\,!)$ dostaneme konečně:[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\sinh^2 a\pi}\left(\frac{\sinh 2a\pi}{2a\pi} - 1\right)\,, \quad a \neq 0\,. \tag{3}$$

[2] Pro $a = 0$ dává Parsevalova rovnost (2) triviální identitu $0 = 0$, ale zkuste si ve vztahu (3) spočítat na obou stranách $\lim_{a \to 0}$. Co dostanete? Je to správně? A uměli byste odůvodnit, že limitní přechod uvnitř nekonečného součtu je korektní? :-)

(4b)

4b

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Ze sudosti dostáváme

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

a dále

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n \sin\frac{\pi n}{2} - 2\right).$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Při dosazení bodu $x = \frac{\pi}{2}$ do (3) tedy na pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{\pi}{4}$, načež dostaneme

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Protože $\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin\pi n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

což je jedna z možných forem výsledku. Je však možno si ještě uvědomit, že výraz $\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}$ je nenulový pouze pro $n = 4k+2$, a pak má hodnotu 2, tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(4k+2)^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

což je jednodušší a přehlednější forma výsledku.

5