



## 10. cvičení - Fourierovy řady

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Definice 1.** Necht'  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $2\pi$ -periodická funkce taková, že  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx < \infty$ . Čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce  $f$* .

Řadu

$$\mathcal{S}f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce  $f$* . Píšeme  $\mathcal{S}f \sim f$ .

( $\mathcal{S}_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ , jde o částečné součty.)

**Věta 2** (Jordanovo – Dirichletovo kritérium). Necht'  $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$  je funkce s **konečnou variací** na intervalu  $[0, 2\pi]$ .

1. Necht'  $x \in \mathbb{R}$ . Pak má funkce  $f$  v bodě  $x$  vlastní limitu zleva  $f(x-)$  i zprava  $f(x+)$  a platí

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

2. Je-li navíc  $f$  **spojitá** na otevřeném intervalu  $(a, b)$ , pak

$$\mathcal{S}_n f \xrightarrow{loc} f \quad \text{na } (a, b).$$

**Věta 3** (Dini). Necht'  $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$  je funkce a  $x \in \mathbb{R}$ . Existují-li vlastní jednostranné limity  $f(x-)$  a  $f(x+)$  a také vlastní limity

$$\lim_{t \rightarrow x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \quad \lim_{t \rightarrow x+} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x},$$

pak

$$\mathcal{S}f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, pokud  $f$  má **konečné jednostranné derivace** v  $x$ , pak  $\mathcal{S}f(x) = f(x)$ .

**Poznámka 4.** Je-li funkce  $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$  po částech **monotónní** na  $(a, b)$  nebo po částech třídy  $\mathcal{C}^1$  na  $(a, b)$ , pak pro každé  $x \in (a, b)$  platí

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

## Fakta

Pro  $m, n \in \mathbb{N}_0$ :

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad m, n \geq 1, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

## Algoritmus

1. **Načrtne**me funkci včetně jejího  $2\pi$ -periodického rozšíření.
2. Spočteme  $a_0, a_n, b_n$  (dáváme pozor na **podmínky**). Není funkce **sudá/lichá**?
3. Sestavíme **Fourierovu řadu**.
4. Zkontrolujeme původní funkci. Je spojitá? Je  $BV$ ? Je  $\mathcal{C}^1$ ? Z vět pak vyplyne **konvergence** Fourierovy řady.
5. **Dosadíme** vhodný bod do číselné řady a využijeme konvergencei.

## Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech  $[0, 2\pi]$  (příp.  $\mathbb{R}$ ) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.

(a)  $f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(b)  $\heartsuit f(x) = \cos^6 x, x \in (-\pi, \pi]$

(c)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$

(d)  $f(x) = \pi^2 - x^2, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

(e)  $\ast f(x) = e^x, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

(f)  $\ast f(x) = \sin(3x) + 4x, x \in (-\pi, \pi], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$

(g)  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$

(h)  $\wp f(x) = x^2, x \in [0, 2\pi),$

2. Zkouškové písemky doc. Rokyty:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/>

- (a)  $\heartsuit f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$  na  $\mathbb{R}$ . Rozviňte tuto funkci do  $2\pi$ -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením  $x = \pi$  sečtěte příslušnou číselnou řadu.

- (b) \*  $f(x) = 0$  na  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ ,  $f(x) = x$  na  $(0, \frac{\pi}{2})$ , je sudá a  $2\pi$ -periodická.  
 Rozviňte funkci do  $2\pi$ -periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a jak (konverguje stejnoměrně?). Dosaďte  $x = \frac{\pi}{2}$  a sečtěte příslušnou číselnou řadu.

3. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

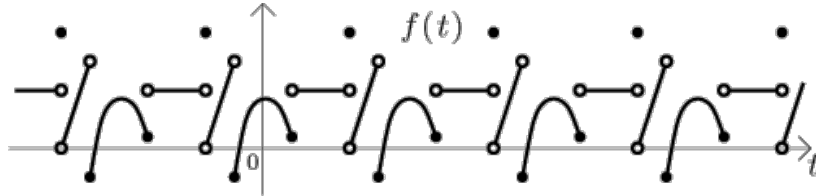


Figure 1: <http://math.feld.cvut.cz/mt/txt/e/3/txc3ea3f.htm>

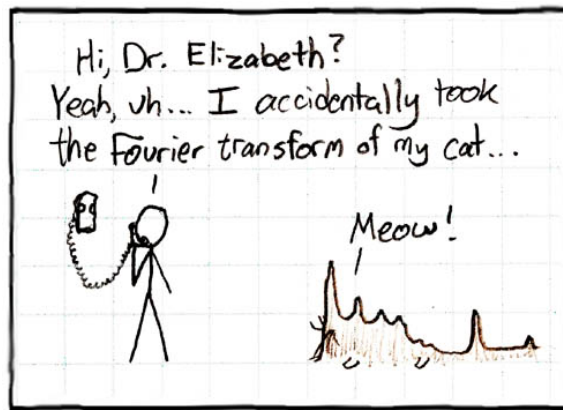


Figure 2: <https://xkcd.com/26/>

(1b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$	(1e) 2x per partes nebo komplex. exponenciála
(1f) $\sin 3x = \sin 3x$	(1h) pozor na interval
(4a) např. VZORCE	
(4b) $\cos^2 \frac{x}{n} - \cos \frac{x}{n} \neq 0$ jen pro $n = 4k + 2$	