10. cvičení - Fourierovy řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická funkce taková, že $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < \infty$. Čísla

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k \in \mathbb{N},$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce f.*

Řadu

$$\mathcal{S}f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce f.* Píšeme $\mathcal{S}f \sim f$.

($\mathcal{S}_n f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, jde o částečné součty.)

Věta 2 (Jordanovo – Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce s **konečnou variací** na intervalu $[0, 2\pi]$.

1. Nechť $x \in \mathbb{R}$. Pak má funkce f v bodě x vlastní limitu zleva $f(x-)$ i zprava $f(x+)$ a platí
$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$
2. Je-li navíc f **spojitá** na otevřeném intervalu (a, b), pak
$$\mathcal{S}_n f \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (a, b).$$

Věta 3 (Dini)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ je funkce a $x \in \mathbb{R}$. Existují-li vlastní jednostranné limity $f(x-)$ a $f(x+)$ a také vlastní limity

$$\lim_{t \to x-} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x}, \quad \lim_{t \to x+} \frac{f(t) - f(x-)}{t - x},$$

pak

$$\mathcal{S}f = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, pokud f má **konečné jednostranné derivace** v x, pak $\mathcal{S}f(x) = f(x)$.

Poznámka 4. Je-li funkce $f \in \mathcal{P}([0, 2\pi])$ po částech **monotónní** na (a, b) nebo po **částech třídy** $\mathcal{C}^1$ na (a, b), pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Fakta

Pro $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \, \mathrm{d}x = 0, \ m, n \geq 1, \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, \mathrm{d}x \quad = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

Algoritmus

1. **Načrtneme** funkci včetně jejího 2π-periodického rozšíření.
2. Spočteme a_0, a_n, b_n (dáváme pozor na **podmínky**). Není funkce **sudá/lichá**?
3. Sestavíme **Fourierovu řadu**.
4. Zkontrolujeme původní funkci. Je spojitá? Je BV? Je $\mathcal{C}^1$? Z vět pak vyplyne **konvergence** Fourierovy řady.
5. **Dosadíme** vhodný bod do číselné řady a využijeme konvergenci.

Příklady

1. Rozviňte funkci do Fourierovy řady. Rozhodněte, zda řada konverguje stejnoměrně (lok. stejnoměrně) na největších možných podintervalech $[0, 2\pi]$ (příp. $\mathbb{R}$) a určete její součet. Určete pak součet zadaných číselných řad.
   (a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
   (b) ♡ $f(x) = \cos^6 x$, $x \in (-\pi, \pi]$
   (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0] \\ x, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$
   (d) $f(x) = \pi^2 - x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
   (e) ❄$f(x) = e^x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$
   (f) ✱$f(x) = \sin(3x) + 4x$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n}{n}$
   (g) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi) \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$
   (h) ❀$f(x) = x^2$ $x \in [0, 2\pi)$,
2. Zkouškové písemky doc. Rokyty:
   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/
   (a) ♡ $f(x) = |\cos \frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč. Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

(b) ❄ $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, $f(x) = x$ na $(0, \frac{\pi}{2})$, je sudá a 2π-periodická.
Rozviňte funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a jak (konverguje stejnoměrně?). Dosaďte $x = \frac{\pi}{2}$ a sečtěte příslušnou číselnou řadu.

3. K jaké funkci konverguje následující funkce? Zakreslete.

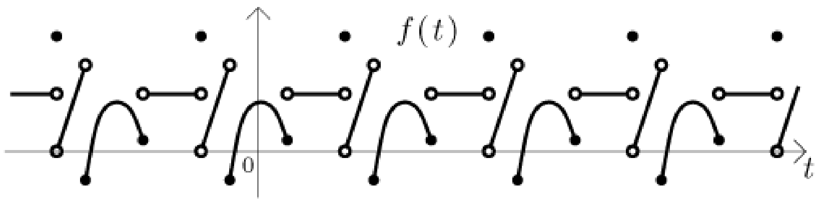

Figure 1: http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/3/txc3ea3f.htm

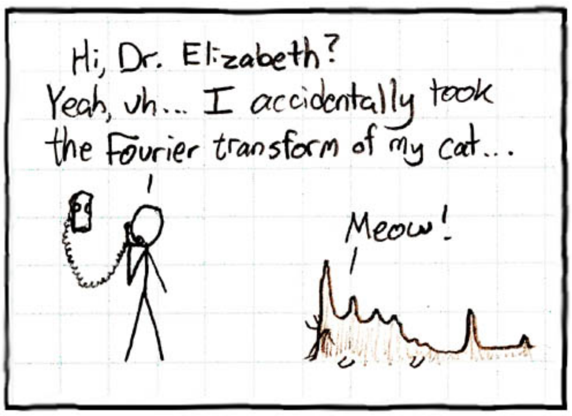

Figure 2: https://xkcd.com/26/

(1b) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
(1e) 2x per partes nebo komplex. exponenciela
(1f) $\sin 3x = \sin 3x$
(1h) pozor na interval
(4a) např. vzorce
(4b) $\cos^2 \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi n}{2} \neq 0$ jen pro $n = 4k + 2$