8. cvičení - Mocninné řady – součty 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Sečtěte následující řady:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}$

   Řešení:

   Minule jsme spočetli, že

   $$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k = \frac{2x}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1.$$

   Dosazením $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8.$$

   Jsme uvnitř kruhu konvergence, tedy není potřeba používat Abelovu Větu.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{1}{5^{2n}}$

   Řešení:

   Uvažujme

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$$

   Poloměr konvergence dané mocninné řady je $R = 1$.
   Pak integrací dostáváme

   $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

   Jde o geometrickou řadu, tedy můžeme sečíst

   $$F(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

   Zderivováním pak dostaneme

   $$f(x) = F'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

   Součet dané řady získáme dosazením $x = \frac{1}{5}$. Jsme uvnitř kruhu konvergence, tedy není potřeba používat Abelovu větu. Dostáváme

   $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{1}{5^{2n}} = f(1/5) = \frac{1 - \frac{1}{5^2}}{(1+\frac{1}{5^2})^2} = \frac{150}{169}$$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Řešení:
Řada konvegruje podle Leibnizova kritéria. Podle Abelovy věty je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k.$$

Potom na kruhu konvergence platí

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{k-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = -\frac{1}{1+x},$$

a tedy

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} = -\ln(1+x) + C,$$

přičemž, protože $f(0) = 0$, je $C = 0$. Odtud vyplývá, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{x \to 1-} f(x) = -\ln 2.$$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{3^k}$

Řešení: Namísto $(-1)^k/3^k$ budeme psát x^k a potom dosadíme $x = -\frac{1}{3}$. Sečtěme tedy řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k.$$

Poloměr konvergence je roven jedné. Je

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k x^k \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \right)' \right)' =$$

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right)' \right)' =$$

$$= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1+x}{(1-x)^3} \right) \right)' =$$

$$= x \cdot \left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \right)' = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}.$$

Odvodili jsme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 x^k = \frac{x(1+4x+x^2}{(1-x)^4}, \qquad |x|<1.$$

Nyní dosazením $x = -\frac{1}{3}$ do levé a pravé strany dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} k^3 = \frac{3}{128}.$$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Řešení:

Řada je konvergentní. Lze ji sečíst elementárně pomocí vztahu

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Snadno tak dostaneme, že

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} = 1.$$

Nicméně to zkusme Abelovou metodou. Za tím účelem sečteme řadu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Na kruhu konvergence je

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x},$$

a proto

$$f'(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + C_1,$$

přičemž $f'(0) = 0$, a tedy $C_1 = 0$. Nyni integrací per partes (s funkcemi $u' = 1$ a $v = \ln(1-x)$) dostaneme

$$f(x) = x - x\ln(1-x) + \ln(1-x) + C_2,$$

opět je zřejmě $f(0) = 0$, a proto $C_2 = 0$. Nakonec, podle Abelovy věty, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x - x\ln(1-x) + \ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} x + \ln(1-x)(1-x) = 1.$$

(Poslední limita se dá vyřešit l'Hospitalem.)

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

Řešení:

Uvažujme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} x^{2n+3}$$

Poloměr konvergence dané mocninné řady je $R = 1$.

Pak derivací dostáváme

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

Jde o geometrickou řadu, tedy můžeme sečíst

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Zintegrováním pak dostaneme

$$f(x) = x - \arctan x + c$$

Dosazením 0 získáme konstantu

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{2n+3} = 0 = 0 - \arctan 0 + c$$

Tedy $c = 0$ a

$$f(x) = x - \arctan x$$

Součet dané řady získáme dosazením $x = 1$. Nejprve tedy musíme ověřit podmínky Abelovy věty. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$ konverguje z Leibnizovy věty.

Tedy dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = f(1) = 1 - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n}$

Řešení:

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

Dosazením $x = 0$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} 0^{2n+3} = 0 - \arctan 0 + C \ ,$$

a tedy $C = 0$. Součet zadané řady nyní dopočteme podle Abelovy věty

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} = \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x - \arctan x) = 1 - \frac{\pi}{4} \ .$$

♣

1g

8.5.10. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} \ .$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

pro $x \in (-1, 1)$. Pravou stranu můžeme snadno derivovat, a tedy podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \ .$$

První člen řady je nulový, a proto opětovným použitím věty o derivaci mocninné řady dostaneme

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \ .$$

Z posledních dvou rovností snadno dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) x^n &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n) x^{n-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= x^2 f''(x) + 3x f'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$. Dosazením $x = \frac{1}{3}$ dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n) \frac{1}{3^n} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3 \ .$$

♣

1b

8.5.11. Příklad. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \,.$$

Řešení. Zkoumejme mocninnou řadu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} x^{2n+1} \,.$$

Snadno zjistíme, že poloměr konvergence této mocninné řady je $R = 1$ a že tato řada konverguje i pro $x = 1$. Z Abelovy věty (Věta 8.3.2) tedy dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = f(1) = \lim_{x \to 1-} f(x) \,.$$

Podle věty o derivaci mocninné řady (Věta 8.2.2) platí pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \,. \tag{8.11}$$

Poslední řadu si označme $g(x)$. Tato řada má poloměr konvergence 1, a z věty o derivaci mocninné řady dostaneme pro všechna $x \in (-1, 1)$

$$g'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2} \,,$$

kde jsme v posledním kroku použili vzorec pro součet geometrické řady. Integrací spočteme

$$g(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(1-x) + C \,.$$

Dosazením $x = 0$ do řady pro $g(x)$ lehce dopočteme $C = 0$. Z (8.11) máme

$$f'(x) = xg(x) = \frac{1}{2} x \log(x+1) - \frac{1}{2} x \log(1-x) \,.$$

Standardní integrací pomocí per-partes a rozkladu na parciální zlomky, kterou zde nebudeme detailně rozepisovat, lze z tohoto spočítat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 \log(1+x) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\log(1-x) + \frac{1}{2}x^2\log(1-x) \right) + C_2 \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\log\frac{x+1}{1-x} + \frac{1}{4}x^2 \log\frac{x+1}{1-x} + C_2 \,. \end{aligned}$$

(i) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$

Řešení:

Sčítáme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1},$$

která konverguje z Leibnize.

Zaveďme řadu

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^{3n+1}}{3n+1},$$

do které pak budeme dosazovat $x=-1$. Daná řada má poloměr konvergence roven 1. Na intervalu $(-1,1)$ ji tedy můžeme zderivovat:

$$f'=\sum_{n=0}^{\infty}-x^{3n}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x^3)^n=\frac{-1}{1-x^3}$$

Po integraci parciálními zlomky dostaneme

$$f(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|4x^2+4x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)+C$$

Po dosazení $x=0$ máme

$$0=f(0)=-\frac{1}{6}\ln 4-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}+C=-\frac{1}{6}\ln 2^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}+C$$

Tedy

$$C=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$$

Celkem tedy

$$f(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|4x^2+4x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$$

Abychom mohli dosadit $x=1$, aplikujeme Abelovu větu (konvergenci už máme), tedy:

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-1)^{3n+1}}{3n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-1)((-1)^3)^n}{3n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Pro limitu dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}&\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|4x^2+4x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right)+\\&\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\\=&\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{6}\ln 4-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}\\=&\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Závěr:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}.$$

2. Sečtěte následující řady (bonus k minulému cviku):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$

Řešení:

Poloměr konvergence je $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$, řada tedy absolutně konverguje pro $x \in \mathbb{R}$.

Po úpravě

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!} = x^5 e^{(x^4)}.$$

Použili jsme fakt, že $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ pro $y \in \mathbb{R}$ a tedy $e^{x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{n!}$ pro $y \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

Řešení:

Poloměr konvergence je 1, v krajních bodech řada diverguje.

Po úpravách máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)'$$

Navíc máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Po zpětném dosazení dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = x((1+x)/(1-x)^3)$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2) x^n$

Řešení:

Poloměr konvergence je 1, v krajních bodech řada diverguje.

Upravíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2) x^n \overset{!}{=} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+2) x^{n+1} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+2} \right)'.$$

Díky první úpravě, kdy jsme vytkli $1/x$, nemůžeme pracovat na celém intervalu $(-1,1)$. V dalších krocích budeme tedy sčítat řadu zvlášť na intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$.
Dále

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = x^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x^3 \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x^3}{(1-x)^2}.$$

Dohromady tedy máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1}{x}\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

Máme sečteno na $(-1,0)$ a $(0,1)$. Protože ale řada je pro $x=0$ rovna 0, lze výsledek dohormady zapsat jako $\sum_{n=0}^{\infty} n(n+2)x^n = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ pro všechna $x \in (-1,1)$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)(n+3)x^{2n}$

Řešení: Poloměr konvergence je roven 1, řada v krajích diverguje.
Nahradíme $x^{2n} = y^n$ a budeme sčítat řadu (také má poloměr konvergence 1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n = y^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+3)y^{n-2}\\ &= y^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n-1}\right)'\end{aligned}$$

Dále pro intervaly $(-1,0)$ a $(0,1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n-1} &= \frac{1}{y^3}\sum_{n=2}^{\infty}(n+3)y^{n+2} = \frac{1}{y^3}\left(\sum_{n=2}^{\infty}y^{n+3}\right)' = \frac{1}{y^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^{n+5}\right)'\\ &= \frac{1}{y^3}\left(y^5\sum_{n=0}^{\infty}y^n\right)' = \frac{1}{y^3}\left(y^5\frac{1}{1-y}\right)' = \frac{y(5-4y)}{(1-y)^2}\end{aligned}$$

Dohromady tedy pro $y \in (-1,0)$ a $y \in (0,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n = y^2\left(\frac{y(5-4y)}{(1-y)^2}\right)' = \frac{-y^2(3y-5)}{(1-y)^3}.$$

Jelikož součet pro $y=0$ je roven 0, lze psát pro $y \in (-1,1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+3)y^n = \frac{-y^2(3y-5)}{(1-y)^3}.$$

Pro původní řadu pak dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n+3)x^{2n} = \frac{-x^4(3x^2-5)}{(1-x^2)^3}.$$

3. Rozviňte do mocninné řady (o středu 0) funkce:

(a) $\dfrac{1}{1+x^3}$

Řešení: Dosadíme do geometrické řady $\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$ pro $y \in (-1,1)$. Tedy

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}.$$

Platí pro $x \in (-1,1)$.

(b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Řešení: Máme

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{-2}{1-x^2}.$$

Po dosazení do geometrické řady vyjde

$$1 + \frac{-2}{1-x^2} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}.$$

Konverguje pro $x \in (-1,1)$.

(c) $\arctan x$

Řešení: Označme $f(x) = \arctan x$. Pak $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Z geometrické řady máme

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Pak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

Víme, že $f(0) = \arctan(0) = 0$. Tedy

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + c = c.$$

Tedy $c = 0$ a můžeme psát

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na poloměru konvergence, tedy $x \in (-1,1)$.

V krajních bodech řada konverguje z Leibnize, použijeme tedy Abelovu větu a dostaneme:

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \arctan x = \arctan 1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Analogicky

$$\arctan(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1}.$$

Závěr:

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

na $x \in [-1, 1]$.

(d) $(1+x)\ln(1+x)$

Řešení: Označme $g(x) = \ln(1+x)$. Pak $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, tedy z geometrické řady je

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Po integraci dostaneme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Dosadíme

$$g(0) = \ln 1 = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} + c = c,$$

tedy $c = 0$. Máme tedy $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pro $x \in (-1, 1)$.

Pro původní funkci platí

$$(1+x)\ln(1+x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+1}.$$

Po úpravě

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Pro $x = -1$ není původní funkce definovaná, ale pro $x = 1$ použijeme Abelovu větu (řada konverguje srovnáním s $1/n^2$).

$$\lim_{x \to 1-} \lim_{x \to 1-} (1+x)\ln(1+x) = 2\ln 2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1^{n+1}}{n(n+1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Závěr:

$$(1+x)\ln(1+x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

pro $x \in (-1, 1]$.

(e) $\dfrac{1}{3-2x}$

Řešení: Vytkneme a pak aplikujeme geometrickou řadu.

$$\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^{n+1}}$$

pro $x \in (-3/2, 3/2)$.

(f) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Řešení: Položme $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Pak $F(x) = \frac{1}{1-x}$. Z geometrické řady

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1,1).$$

Po zderivování máme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

pro $x \in (-1,1)$.

(g) $\sin^2 x$

Řešení: Platí

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)).$$

Z Taylorova rozvoje pro kosinus je

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},$$

$x \in \mathbb{R}$.

(h) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

Řešení: opsáno z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf.
Z geometrické řady máme

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Řada absolutně konverguje pro $x \in (-1,1)$. Pro její koeficienty navíc platí

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2l, \\ 0, & n = 2l+1, \end{cases}$$

kde $l \in \mathbb{N}_0$.
Použijeme vzorec pro násobení řad.

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k a_{n-k} x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

kde

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Uvažujme lichá $n = 2m+1$. Pak čísla k a $2m+1-k$ jsou vždy jedno liché a jedno sudé, tedy jeden z indexů a_k a a_{2m+1-k} je nulový a $a_k \cdot a_{2m+1-k} = 0$.
Nechť $n = 2m$ je sudé. Pak čísla k a $2m-k$ jsou buď obě sudá nebo obě lichá. Pokud jsou obě lichá, pak $a_k a_{2m-k} = 0 \cdot 0 = 0$.
Konečně pokud jsou sudá, pak

$$a_k a_{2m-k} = (-1)^{k/2}(-1)^{m-k/2} = (-1)^m.$$

Sudých čísel je navíc v množině $\{0, 1, 2, \ldots, 2m\}$ právě $m+1$. Tedy

$$b_n = b_{2m} = (-1)^m(m+1).$$

Dohromady je řada tvaru

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Bonus

4. Příklad máme z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf

   Řekneme, že funkce je *vyjádřitelná na okolí 0 jako mocninná řada (MR)*, pokud existuje $\delta > 0$ a posloupnost $\{a_n\}$ splňující, že $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-\delta, \delta)$.

   Uvažujte f definovanou na okolí 0. Určete, jaké implikace mezi následujícími tvrzeními platí.

   (a) f je MR;
   (b) f je MR a existuje $k \in \mathbb{N}_0$: $f^{(k)}(0) \neq 0$;
   (c) existuje $k \in \mathbb{N}_0$ a funkce g, která je MR, $g(0) \neq 0$ tak, že na nějakém okolí 0 platí $f(x) = x^k g(x)$;
   (d) $f \in C^\infty(-\delta, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$.

Řešení:

$$(c) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (d)$$

(b) $\Rightarrow$ *(c)* Nechť $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Z věty o derivaci mocninných řad lze získat vztah $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Z předpokladu pak existuje k, že $a_k \neq 0$. Uvažujme nejmenší takové k. Tedy

$$f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} x^k a_n x^{n-k} = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$$

Položme $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$.

$(b) \Leftarrow (c)$ Stačí položit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+k},$$

kde $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

$(a) \Rightarrow (d)$ Plyne z věty o derivaci mocninné řady.

$(a) \not\Leftarrow (b)$ Položme $f \equiv 0$.

$(d) \not\Rightarrow (a)$ Uvažujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Pak funkce je hladká (z definice vyjde $f^{(n)}(0) = 0$). Jediným kandidátem na Taylorovu řadu je ovšem nulová řada, která se ale nerovná původní funkci.