



7. cvičení - Mocninné řady – součty

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtete následující řady:

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

Řešení: Označme

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je roven 1.

Formálním derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem x^2 . Zároveň je to mocninná řada s koeficienty Uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

Rozkladem na parciální zlomky nebo z tabulky máme

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + K,$$

tudíž

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + K.$$

Jelikož

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$

a zároveň

$$f(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0}{1-0} + K,$$

dohromady vyjde $K = 0$ a tedy

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Pro krajní body platí, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

divergují (tedy nemá smysl je sčítat).

(b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

Řešení:

Označme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Poloměr konvergence je pak 1. Na $(-1, 1)$ můžeme zderivovat

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Geometrickou řadu můžeme sečíst, tedy

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Po zintegrování dostaneme

$$f(x) = -\ln|1-x| + K.$$

Můžeme dosadit 0:

$$-\ln|1-0| + K = f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n} = 0$$

a dostaneme $K = 0$. Tedy

$$f(x) = -\ln|1-x|, \quad x \in (-1, 1).$$

Krajní body: Pro $x = 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Pro $x = -1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje z Leibnize. Pro její součet použijeme Abelovu Větu s $r = -1$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \rightarrow -1^+} -\ln|1-x| = -\ln 2.$$

Závěr:

$$f(x) = -\ln|1-x|, \quad x \in [-1, 1).$$

2. Integrovaním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Řada má poloměr konvergence jedna. Platí, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Označme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

Potom na kruhu konvergence platí integrováním člen po členu, že

$$f(x) = F'(x), \quad \text{kde} \quad F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Odtud vyplývá, že

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

(b) $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k.$$

Poloměr konvergence je 1. Podle věty o integraci člen po členu platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)x^k &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k+1} \right)' = \left(x^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \right)' = \\ &= \left(x^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \right)' = \left(x^2 \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' \right)' = \left(x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \\ &= \frac{2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^2 - 2x^3}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

3. Derivováním nebo integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

Označme

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Poloměr konvergence je 1.

Derivováním člen po členu dostaneme řadu

$$1 - x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

což je geometrická řada s prvním členem 1 a kvocientem $-x^2$. Poloměr konvergence je též 1.

Uvnitř kruhu konvergence platí

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}.$$

Platí, že

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

tudíž

$$f(x) = \arctan x + K.$$

Jelikož

$$\arctan 0 + K = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0,$$

tak $K = 0$.

Máme tedy

$$f(x) = \arctan x, \quad |x| < 1.$$

V krajních bodech

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pm 1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

konverguje z Leibnize. Aplikujme Abelovu větu. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \arctan x = -\frac{\pi}{4}.$$

Závěr:

$$f(x) = \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

(b) $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Řešení: Máme sečíst řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k$$

Řada má poloměr konvergence 1.

Podle věty o integrování člen po členu, máme pro $|x| < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^k &= x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 x^{k-1} = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^k \right)' \\ &= x \cdot \left(x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k x^{k-1} \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k \right)' \right)' \\ &= x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x}{1+x} \right)' \right)' = x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \right)' \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{(1+x)^2} \right)' \\ &= x \cdot \left(\frac{(1+x)^2 - 2x(1+x)}{(1+x)^4} \right) = x \cdot \frac{1-x^2}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}. \end{aligned}$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$

Řešení:

Poloměr konvergence řady je 1. Integrováním člen po členu dostaneme pro $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

V krajních bodech $x = \pm 1$ řada diverguje (nutná podmínka konvergence).

Zkouškové příklady

4. Sečtěte řadu

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$

Řešení: Poloměr konvergence je roven 1.

Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

Zderivujeme funkci $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Dostáváme

$$g''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{x^n}{n(n+1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Pak

$$g'(x) = -\ln|1-x| + K.$$

Jelikož jsme na intervalu $(-1, 1)$, můžeme psát

$$g'(x) = -\ln(1-x) + K.$$

Pro $x = 0$ máme

$$-\ln(1-0) + K = g'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 0,$$

tedy $K = 0$.

Po zintegrování (per partes):

$$g(x) = x - (x-1)\ln(1-x) + M.$$

Po dosazení $x = 0$ dostaneme

$$g(0) = 0 - (0-1)\ln(1-0) + M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n+1}}{n(n+1)} = 0,$$

tedy $M = 0$.

Dohromady pro $x \in (-1, 1)$:

$$f(x) = xg(x) = x^2 - x(x-1)\ln(1-x).$$

V krajních bodech řada $x = \pm 1$ konverguje (srovnání s $1/n^2$). Dle Abelovy věty máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{n+2}}{n(n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x(x-1)\ln(1-x) = 1 + 0$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n(n+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - x(x-1)\ln(1-x) = 1 - 2\ln 2.$$

Dohromady pro $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = x^2 - x(x-1)\ln(1-x).$$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$

Řešení:

Poloměr konvergence je roven ∞ .

Položme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}.$$

Využijeme součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Mějme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

Pak $f(x) = x^3 g(x)$.

Máme

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n-1}}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{n!} \right)' = \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} \right)' = \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \right)'$$

Poslední sumu nahradíme $e^x - 1$ (platí pro $x \in \mathbb{R}$) a zpátky proderivujeme:

$$g(x) = \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \right)' = (x(e^x - 1))' = (xe^x)' = e^x(x + 1)$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 e^x (x + 1) = e^x (x^4 + x^3)$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$

Řešení: Platí, že $a_k = 0$ pro sudá k , pro lichá $k = 2n + 1$ je $a_k = (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n}$.

Poloměr konvergence je tedy roven 1. V krajích řada konverguje podle Leibnizova kritéria.

Pro $x \in (-1, 1)$ položme $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$. Pak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n} x^{2n}.$$

Řadu můžeme roztrhnout na

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^{2n}.$$

Z geometrické řady je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3x^{2n} = \frac{-3x^2}{1+x^2}.$$

Z Taylorova rozvoje logaritmu pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^{2n} = -\log(1+x^2).$$

Dohromady je

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{1+x^2} - \log(1+x^2).$$

Po zintegrování dostaneme

$$f(x) = -x + \arctan x - x \log(1+x^2) + c.$$

Dosadíme 0 a získáme $c = 0$. Pro $x \in (-1, 1)$ tedy platí

$$f(x) = -x + \arctan x - x \log(1 + x^2).$$

Protože řada v krajích konverguje, z Abelovy věty dostaneme

$$f(x) = -x + \arctan x - x \log(1 + x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$$

Řešení: Poloměr konvergence $R = \infty$. Položme

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n = - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!} x^n$$

Z rozvoje exponenciály máme

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = -(e^{-x} + x - 1)$$

a

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!} x^n = x \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} = x(e^{-x} - 1)$$

Dohromady pak

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 + xe^{-x} - x = (x+1)e^{-x} - 1$$