



7. cvičení - Mocninné řady – součty

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Derivace mocninné řady). Necht' R je poloměrem konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}$ je také roven R .

Pro $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$ definujme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Pak funkce f má vlastní derivace v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, $|x-x_0| < R$ a platí

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x-x_0)^{n-1}.$$

Věta 2 (Integrace mocninné řady). Mějme mocninnou řadu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence $R > 0$.

Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc platí

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C \quad \text{na } (x_0 - R, x_0 + R).$$

Věta 3 (Abel). Necht' $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Necht' navíc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0, x_0 + R]$ a

$$\lim_{x \rightarrow (x_0+R)^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

(Věta platí i pro variantu $[x_0 - R, x_0]$.)

Algoritmus

1. Najdeme **poloměr konvergence**.
2. Odhadneme, na jakou řadu budeme převádět (najdeme podobného Taylora, kterého umíme sečíst). Častá volba: geometrická řada.
3. Rozhodneme, zda budeme spíš
 - (a) **integrovat** - členy nx^n
 - (b) **derivovat** - členy x^n/n
4. Pokud je to nutné, řadu **upravíme** - např. $\sum \frac{x^n}{n-1} = x \sum \frac{x^{n-1}}{n-1}$.
5. **Zderivujeme/zintegrujeme** a sečteme.
6. **Zintegrujeme/zderivujeme** zpátky. U integrálů nezapomeneme na **konstanty**.
7. Zkontrolujeme **krajní body** - jestliže tam původní řada konverguje, aplikujeme Abelovu větu.
8. Napíšeme **závěr**.

Příklady

1. Derivováním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

(b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

2. Integrovaním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $\clubsuit x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$

(b) $\heartsuit 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$

3. Derivováním nebo integrováním člen po členu sečtěte následující řady:

(a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

(b) $\clubsuit x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$

Zkouškové příklady

4. Sečtěte řadu

(a) $\heartsuit \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)}$

(c) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{2n^2+n} x^{2n+1}$

(b) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{x^{n+2}}{n!}$

(d) $\clubsuit \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!} x^n$

(4d) roztrhnout, pak exp	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (4b)	(2b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
(4c) zderivovat, pak roztrhnout	$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ (4a)	(2a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$