6. cvičení - Mocninné řady – poloměr konvergence

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete poloměr konvergence mocninných řad a konvergenci (i absolutní) na hranici.

   (a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20} x^n$$

   Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^7}{n+20}}$$

   Vyřešíme buď přes 2 policajty, nebo přes větičku:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^7}{n+1+20}}{\frac{n^7}{n+20}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7(1+\frac{1}{n})^7}{n^7} \cdot \frac{n+20}{n+21} \overset{AL}{=} 1.$$

   a tedy $R = 1$.
   Chování na hranici: Pro $x = 1$ ani pro $x = -1$ řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
   Závěr: řada konverguje absolutně na $(-1, 1)$, jinak diverguje.

   (b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n,$$

   kde $(0 < \alpha < 1)$
   Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu
$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha^{n^2}|} = \limsup_{n\to\infty} \alpha^n = 0,$$

   a tedy $R = +\infty$.

   (c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p},$$

   kde $p \in \mathbb{R}$.
   Řešení: Pro každé $p \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}} \right| = 1,$$

   tudíž poloměr konvergence je vždy 1.
   Chování na hranici:
   Pokud $p > 1$, pak řada konverguje absolutně na hranici.

Pokud $1 \geq p > 0$, potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p},$$

konverguje neabsolutně dle Leibnize. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

diverguje.
Pro $p \leq 0$ řada na hranici diverguje.
Závěr:

- Pro $p > 1$ řada absolutně konverguje na $[-1, 1]$, jinak diverguje.
- Pro $1 \geq p > 0$ řada absolutně konverguje na $(-1, 1)$, v bodě -1 konverguje neabsolutně. Jinak řada diverguje.
- Pro $p \leq 0$ řada absolutně konverguje na $(-1, 1)$, jinak diverguje.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n,$$

kde $(a > 1)$
Řešení:
Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{a^{n^2}}}{\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty.$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

Řešení:
Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|3^n + (-2)^n|}{n}} = \limsup_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{\sqrt[n]{|1 + (-2/3)^n|}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3.$$

tudíž poloměr konvergence je $\frac{1}{3}$. (V odhadech jsme použili $\sqrt[n]{1} \leq |\sqrt[n]{1 + (2/3)^n}| \leq \sqrt[n]{2}$ a faktu, že lim sup se bude týkat sudých n.)
Chování na hranici: Je třeba vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

V prvním případě máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n},$$

což porovnáme s řadou $\sum b_n = \sum 1/n$, která diverguje.
V druhém případě získáme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2^n}{n3^n}.$$

První část konverguje z Leibnize, druhá z d'Alamberta, tedy konverguje. Absolutní konvergenci již vyloučil první případ, neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \right| \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$$

Řešení:
Jedná se o mocninnou řadu, jejíž koeficienty jsou povětšinou nulové, s výjimkou koeficientů u x^{n^2}. Je třeba myslet na to, že koeficient $\frac{1}{2^n}$ je koeficient nikoliv u n-tého, ale n^2-tého členu této řady. Abychom mohli použít vztahy pro výpočet poloměru konvergence, potřebujeme najít vztah pro n-tý koeficient a_n.
Jestliže ale platí

$$a_{n^2} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{a koeficienty jsou jinde nulové,}$$

potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad \text{pokud } n = k^2 \text{ pro nějaké } k \text{ přirozené} \\ a_n &= 0 \qquad \text{jinak} \end{aligned}$$

Podle Cauchy-Hadamardova vztahu spočteme

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}} = 2^0 = 1.$$

Na hranici řada zjevně konverguje absolutně.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

Řešení: Platí

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}{\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1.$$

Pro konvergneci na hranici využijeme odhadů dokazatelných indukcí

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} > \frac{1}{2n+1}, \qquad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Z prvního odhadu je zřejmé, že pro $x = 1$ řada diverguje srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{2n+1}$. Z druhého odhadu vyplývá, že pro $x = -1$ řada konverguje neabsolutně podle Leibnize. (Nutno dokázat monotonii posloupnosti $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$).

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

Řešení: Platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

Tudíž $R = \frac{1}{4}$.
Konvergence na hranici: Vyšetřujeme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n}.$$

Uvažujme první řadu.
Podíváme-li se pouze na sudé členy, dostaneme

$$a_{2n} = \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Pro liché členy dostaneme

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{4^{2n+1}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Naši řadu lze tedy odhadnout zdola divergentní řadou $b_n = 1/(2n)$, tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} \frac{1}{4^n}$$

diverguje.
U druhé řady dostaneme opět sudé členy

$$a_{2n} = \frac{4^{2n}}{2n} \frac{1}{4^{2n}} = \frac{1}{2n}.$$

Pro liché členy dostaneme

$$a_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{-1}{4^{2n+1}} = \frac{-1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Z předchozího máme, že absolutně řada nekonverguje.
Pro neabsolutní konvergenci uvažujme posloupnost částečných součtů s_n. Protože pro liché členy je $|a_{2n+1}| \leq \frac{1}{2^{2n+1}}$, máme

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{6} - \frac{1}{128} + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots - \left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Pro limitu částečných součtů pak máme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty - \frac{2}{3} = \infty,$$

tedy řada diverguje.
Pozn.: Pozor na přerovnávání řad, neabsolutně konvergentní řady není možno libovolně přerovnávat.

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n},$$

kde $a > 0$, $b > 0$.
Řešení:
BÚNO předpokládejme, že $a > b$. Pak Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^n + b^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a} \sqrt[n]{\frac{1}{1 + (b/a)^n}} = \frac{1}{a},$$

a tudíž

$$R = a.$$

(Použili jsme odhady $1 \leq 1 + (b/a)^n \leq 2$.)
Na hranici řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n} \to 1 \neq 0.$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

Řešení:
Je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n!)^2}{(2n!)}}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Tudíž poloměr konvergence je 4.
Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n 4^n.$$

Pro $x = -4$ máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

použijeme NP a zjišťujeme, zda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$$

jde k 0. Porovnáme a_n a a_{n+1}:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!n!4^n(2n+2)!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!4\cdot 4^n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$$

Tedy posloupnost a_n je rostoucí, první člen je roven 1, tedy zjevně nejde k 0, tedy řada diverguje v bodě -4. Tedy v bodě 4 také.
Závěr: řada absolutně konverguje na $(-4, 4)$.

(k)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$$

Řešení: Podle Cauchy-Hadamardova vztahu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

a tedy $R = \frac{1}{e}$.
Na hranici tedy vyšetřujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}(-1)^n.$$

Platí ale

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

tudíž řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence $a_n \to 0$. Limitu lze spočítat například takto pomocí Taylorova rozvoje (s využitím spojitosti exponenciální funkce):

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left[x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x\right] = e^{-\frac{1}{2}}$$

Protože pro $y = \frac{1}{x}$ máme z Taylora:

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} \ln(1+y) - \frac{1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2}\left(y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\right) - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}.$$

Závěr: řada konverguje na $(-1/e, 1/e)$.

(l)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}},$$

kde $a > 0$.
Řešení:
Podle Cauchy-Hadamardova vztahu platí

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}} = \limsup_{n\to\infty} a^{-\frac{\sqrt{n}}{n}} = a^0 = 1.$$

Tedy

$$R = 1.$$

Pokud $a > 1$, potom řada na hranici konverguje absolutně, což plyne ze srovnání

$$\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{a^{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(Limitu lze spočíst například použitím Heineho věty a dvojnásobným aplikováním l'Hopitalova pravidla.)
Pokud $0 < a \leq 1$, potom řada na hranici diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, $a_n \not\to 0$.

(m)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) \cdot x^n,$$

kde $a > 0$, $b > 0$.
Řešení: Máme

$$a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}$$

Vyšetříme dva případy, nejprve $a \geq b$, pak

$$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{a^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2a^n}{n}} = a$$

$$R = \frac{1}{a}$$

analogicky pro $a < b$:

$$b = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{b^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2b^n}{n}} \stackrel{VOAL}{=} b$$

$$R = \frac{1}{b}$$

Krajní body vyšetříme pro oba případy zvlášť. Řadu rozvíjíme v 0, tedy krajní body jsou $R = \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ a $-R = -\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$.
Nechť $a \geq b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{b^n}{a^n n^2} \right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Použijeme porovnání řad (mají kladné členy) a zjistíme, že řada diverguje. Druhý krajní bod:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{(-1)^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n b^n}{a^n n^2} \right)$$

Toto můžeme roztrhnout na 2 konvergentní řady, první konverguje z Leibnize, druhá taktéž. Tedy řada v krajním bodě $-1/a$ konverguje, ale nikoli absolutně.
Nechť $a < b$. Pak nás zajímá řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \frac{1}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{b^n n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Toto opět roztrhneme na 2 řady, první konverguje z d'Alembertova kritéria, o druhé to víme. Tedy roztržení bylo korektní (roztrhli jsme na 2 konvergentní řady), řada konverguje. Dosadíme-li následně jako krajní bod $-1/b$, můžeme rozvnou říci, že řada konverguje absolutně.

Bonus

2. Víme, že řada $\sum a_n (x+7)^n$ konverguje pro $x = 0$ a diverguje pro $x = -17$. Co můžeme říct o poloměru konvergence?
   Řešení: Jelikož je střed mocninné řady v $x_0 = -7$, pro poloměr konvergence platí $7 \leq \rho \leq 10$.
3. Víme, že řada $\sum a_n x^n$ konverguje pro $x = -4$ a diverguje pro $x = 7$. Určete, zda jsou následující výroky pravdivé, nepravdivé nebo pravdivost nelze určit:

   LEŽ Řada konverguje pro $x = 10$.
   PRAVDA Řada konverguje pro $x = 3$.
   LEŽ Řada diverguje pro $x = 1$.
   NEVÍME Řada diverguje pro $x = 6$.

   Řešení: Střed je v $x_0 = 0$, poloměr konvergence $4 \leq R \leq 7$. Tedy řada určitě konverguje na $[-4, 4)$ a určitě diverguje na $[7, \infty)$ a $(-\infty, -7)$. Na ostatních intervalech nevíme.
4. Najděte mocninnou řadu, která:
   (a) diverguje pro $x = 0$;
   Řešení:
   Např. $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x-42)^n$. Tato řada má poloměr konvergence $R = 1/5$ a střed v $x_0 = 42$. V 0 tedy určitě diverguje. (Lze zjistit i dosazením, $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n 42^n$ diverguje.)

(b) konverguje pro $x = 5$, ale nikde jinde;
Řešení:
Např. $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-5)^n$.

(c) má střed konvergence v 0, poloměr konvergence roven 2 a konverguje pro 2, ale diverguje pro -2.
Řešení: Zkusme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n.$$

Poloměr konvergence je $R = 2$. Pro krajní bod $x = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

což konverguje. Pro $x = -2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n},$$

což diverguje.

5. Nechť mocninná řada $\sum a_n x^n$ má poloměr konvergence roven R_1 a mocninná řada $\sum b_n x^n$ má poloměr konvergence roven R_2. Co můžeme říct o poloměru konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$?
Řešení: Platí, že $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

- Uvažujme x takové, že $|x| < \min\{R_1, R_2\}$. Pak obě řady konvergují absolutně a z linearity řad máme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n x^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n + |b_n| \cdot |x|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \cdot |x|^n < \infty.$$

- Jestliže $R_1 < R_2$, tak dokonce $R = R_1$.
Uvažujme x takové, že $R_1 < |x| < R_2$. Pak z linearity konvergence řad máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

což je konvergentní plus divergentní řada, tedy dohromady divergentní.
Protože i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ je mocninná řada, pro x: $|x| \geq R_2$ plyne divergence z předchozího.

- Jestliže $R_1 = R_2$, může být i $R > R_1$.
Např.
  (a) $a_n = 1$, $b_n = -1$, $R = \infty$
  (b) $a_n = 1$, $b_n = 1$, $R = 1 = R_1$
  (c) $a_n = 1 + 2^{-n}$, $b_n = -1$, $R = 2$, $1 = R_1$