4. cvičení - Řady funkcí - derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

(Některé máme od: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/)

1. Vyšetřete konvergenci řad (může dojít na BC podmínku).

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Pro $x = 0$ řada zjevně konverguje. Pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ máme
   $$\frac{|x|}{1+n^2x^2} \le \frac{|x|}{n^2x^2} \le \frac{1}{n^2|x|}$$
   tedy ze srovnávacího kritéria řada konverguje. Závěr: řada bodově konverguje na $\mathbb{R}$.
   - Stejnoměrná konvergence pro $x \in [q, \infty)$, $q > 0$. Zafixujme n a hledejme
   $$\sigma_n = \sup\left\{\frac{|x|}{1+n^2x^2}, x \in [q,\infty)\right\}$$
   Z odhadů výše máme
   $$\frac{|x|}{1+n^2x^2} \le \frac{|x|}{n^2x^2} \le \frac{1}{n^2|x|} \le \frac{1}{qn^2}$$
   Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{qn^2}$ konverguje, tak z Weierstrassova kritéria konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ na $[q,\infty)$.
   Pro $(-\infty, -q]$ analogicky.
   - Konvergence kolem 0:
   Vyvrátíme stejnoměrnou konvergenci pomocí BC podmínky.
   Uvažujme interval $[-q, q]$, kde $0 < q$.
   Potřebujeme ukázat, že
   $$\exists \varepsilon > 0\, \forall n_0\, \exists m, n,\ m \ge n \ge n_0\, \exists x \in M : \left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| \ge \varepsilon.$$
   Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pro n_0 položme $n = n_0 + 1$, $m = 2n_0$, $x = \frac{1}{2n_0}$. Pak máme
   $$\sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{\frac{1}{2n_0}}{1+j^2(\frac{1}{2n_0})^2} \ge \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0}\cdot\frac{1}{1+(2n_0)^2(\frac{1}{2n_0})^2} = \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = n_0\cdot\frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$$
   Navíc pracujeme s n_0 tak velkým, aby $x = \frac{1}{2n_0} \in [-q, q]$.
   Tedy z BC podmínky máme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném okolí 0.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Pro $x = 0$ řada zjevně konverguje. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|x|}{n^4+x^2}$ srovnáme LSK s $\frac{1}{n^3}$. Tedy absolutně konverguje, tedy konverguje. Závěr: řada bodově konverguje na $\mathbb{R}$.
- Stejnoměrná konvergence. Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\left\{\frac{n|x|}{n^4+x^2}, x \in (-\infty, \infty)\right\}$$

  Zderivujme

$$(f_n)' = \frac{n(n^4 - x^2)}{(n^4+x^2)^2}$$

  nulový bod: $x = \pm n^2$. Máme $f_n(\pm n^2) = \pm\frac{1}{2n}$.
  Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverguje, tak z Weierstrassova kritéria nelze rozhodnout.
- Lokálně stejnoměrná konvergence.
  Uvažujme interval $[-q, q]$, kde $0 < q$. Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\left\{\frac{n|x|}{n^4+x^2}, x \in [-q, q]\right\}$$

  Pak pro dostatečně velké n je

$$\sigma_n = \frac{n|q|}{n^4+q^2}$$

  Z bodové konvergence víme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|q|}{n^4+q^2}$$

  konverguje.
  Tedy z Weierstrassova kritéria máme

$$\frac{nx}{n^4+x^2} \rightrightarrows \text{ na } [-q, q],$$

$$\frac{nx}{n^4+x^2} \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } \mathbb{R}.$$

- Konvergence na celém $\mathbb{R}$.
  Vyvrátíme stejnoměrnou konvergenci pomocí BC podmínky.
  Uvažujme interval $[q, \infty)$, kde $0 < q$.
  Potřebujeme ukázat, že

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_0 \, \exists m, n, \; m \geq n \geq n_0 \, \exists x \in M : \left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| \geq \varepsilon.$$

Položme $\varepsilon = \frac{1}{16}$, pro n_0 položme $n = n_0 + 1$, $m = 2n_0$, $x = n_0^2$. Pak máme

$$\sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{jn_0^2}{j^4 + n_0^4} \geq \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{jn_0^2}{j^4 + j^4} = \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{n_0^2}{2j^3} \geq \sum_{j=n_0+1}^{2n_0} \frac{n_0^2}{2(2n_0)^3} \geq n_0 \frac{n_0^2}{2(2n_0)^3} = \frac{1}{16}$$

Navíc pracujeme s n_0 tak velkým, aby $x = n_0^2 \in [q, \infty)$.
Tedy z BC podmínky máme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$ nekonverguje stejnoměrně na žádném okolí ∞.

2. (a) Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

Řešení: Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- f_n má vlastní derivaci na $\mathbb{R}$:

$$f_n' = (-1)^n \frac{\cos(1 + \frac{x}{n})}{n\sqrt{n}}$$

- existuje $x_0 \in (a, b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje: Pro $x = 0$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 1}{\sqrt{n}}$$

  konverguje dle Leibnize.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$: Máme odhad

$$|f_n'| = \left| (-1)^n \frac{\cos(1 + \frac{x}{n})}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

  a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje.

Tedy můžeme prohodit řadu a derivaci a dostaneme

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n\sqrt{n}}.$$

(b) Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

Řešení: Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- f_n má vlastní derivaci na $\mathbb{R}$:

$$f_n' = \frac{n \cos nx}{2^n}$$

- existuje $x_0 \in (a,b)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje: Pro $x = 0$ máme
$$\sum_{n=1}^{\infty} 0$$
konverguje.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$: Máme odhad
$$|f_n'| = \left|\frac{n\cos nx}{2^n}\right| \leq \frac{n}{2^n}$$
a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konverguje z limitního podílového kritéria.

Tedy můžeme prohodit řadu a derivaci a dostaneme
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos nx}{2^n}$$

(c) Uvažujte funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde
$$f_n(x) = \frac{\sin\frac{x}{n}}{n + x^2}.$$

i. Ukažte, že f je dobře definována na $\mathbb{R}$.
ii. ♡ Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.
iii. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.
iv. Spočtěte derivaci funkce f na $\mathbb{R}$ (vyjádřete jako řadu).

Řešení:

- Bodová konvergence. Zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak pro $x = 0$ je řada konstantně nulová, tedy konverguje. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ srovnáme s $b_n = \left|\frac{x/n}{n+x^2}\right| = \frac{|x|}{n^2+nx^2}$, kde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+nx^2}$ konverguje. Tedy z LSK řada konverguje.
- Vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Máme
$$f_n' = \frac{\cos(x/n)\frac{1}{n}(n+x^2) - \sin(x/n)2x}{(n+x^2)^2}$$
Derivace je tedy dobře definovaná na $\mathbb{R}$.
Dále $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.
Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $(-q, q)$, kde $q > 0$. Pro pevné n odhadujeme
$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{\cos(x/n)\frac{1}{n}(n+x^2) - \sin(x/n)2x}{(n+x^2)^2}\right|, x \in (-q,q)\right\}$$
Odhadujme
$$\left|\frac{\cos(x/n)\frac{1}{n}(n+x^2) - \sin(x/n)2x}{(n+x^2)^2}\right| \leq \left|\frac{1(1+\frac{q^2}{n}) + 1\cdot 2q}{n^2}\right| \leq \frac{q^2+2q+1}{n^2}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q+1)^2}{n^2}$ konverguje.
Tedy z Weierstrassova kritéria řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows \text{ na } (-q, q).$$

- Z věty o záměně sumy a derivace platí máme i

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows \text{ na } (-q, q).$$

- Z věty píšeme

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x/n)\frac{1}{n}(n + x^2) - \sin(x/n)2x}{(n + x^2)^2}$$

(d)✿ Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí $\zeta \in C^1(1, \infty)$.
Řešení: Řada konverguje právě pro $x \in (1, \infty)$. Tam budeme řadu vyšetřovat. Aplikujeme větu o záměně sumy a derivace. Ověřujeme tedy tři podmínky.

- f_n má vlastní derivaci na $(1, \infty)$:

$$f_n' = -\frac{\log n}{n^x}$$

- existuje $x_0 \in (1, \infty)$ takové $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje: Pro $x = 2$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

  konverguje.
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na $(1 + \varepsilon, \infty)$. Máme odhad

$$|f_n'| = \left|\frac{-\log n}{n^x}\right| \leq \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}}$$

  a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^{1+\varepsilon}}$ konverguje.

Z vět o derivaci a spojitosti dostaneme, že $\zeta(x) \in \mathcal{C}^1(1 + \varepsilon, \infty)$.
Proces lze zopakovat pro každé $\varepsilon > 0$ a tedy $\zeta(x) \in \mathcal{C}^1(1, \infty)$.

Zkouškové příklady

3. Uvažujte funkci
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-x^2+6x-8)^n.$$

(a) Určete, pro která x je f definována.
Řešení: jde o geometrickou řadu, tedy potřebujeme
$$-1 < -x^2+6x-8 < 1$$
Po vyřešení kvadratických nerovnic vyjde $x \in (3-\sqrt{2}, 3) \cup (3, 4+\sqrt{2})$.

(b) Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.
Řešení: Potřebujeme ukázat spojitost f na nějakém okolí bodu $3,5$. Uvažujme $U = (3,3; 3,7)$. f_n jsou tam zjevně spojité. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$, tak bude spojitá i f.
Aplikujeme Weierstrassovo kritérium. Tedy fixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n| : x \in U\}$$
Z tvaru f_n plyne, že
$$\sigma_n = 0,91^n.$$
Protože geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 0,91^n$ konverguje, tak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ a tedy je f spojitá na U.

(c) Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.
Aplikujeme větu o záměně derivace a řady.
- f_n jsou diferencovatelné na U - jsou to polynomy.
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(4) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ konverguje.
- Vyšetřeme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

$$f_n' = n(-x^2+6x-8)^{n-1}(-2x+6)$$

Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Pak
$$\sigma_n = \sup\{|n(-x^2+6x-8)^{n-1}(-2x+6)| : x \in U\} \leq |n(0,91)^{n-1}(-1,4)|$$
Máme
$$\sum_{n=1}^{\infty} |n(0,91)^{n-1}(-1,4)| < \infty$$
z d'Alambertova kritéria.
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$.
Z věty plyne
$$f'(7/2) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot (-1)$$

Bonus

(Některé máme od: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf)

4. Nechť $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) Funkce f je spojitá a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.

   (b) Funkce f je spojitá skoro všude a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0,1]$.

   (c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$.

   Řešení:

   - (a$\to$b) Zřejmě.
   - (b$\not\to$a) Protipříklad: $f(x) = x$ na $[0,1)$, $f(1) = \frac{1}{2}$.
   - (b$\not\to$c) Protipříklad: $f(x) = x$ na $[0,1)$, $f(1) = 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ na $[0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) = 0$. Řada ale nekonverguje stejnoměrně, protože nesplňuje nutnou podmínku. Totiž $x^n \not\rightrightarrows 0$ na $(0,1)$.
   - (c$\not\to$a) Protipříklad: $f(x) = 0$ na $[0,1/2)$, $f(x) = \frac{1}{2}$ na $[1/2,1]$. Pak $\sup |f^n(x)| = \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní řada, tedy z Weierstrassova kritéria řada konverguje. Ale f není spojitá.
   - (c$\not\to$b) Protipříklad: $f(x) = 0$ na $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{1}{2}$ na $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Pak $\sup |f^n(x)| = \frac{1}{2^n}$, což je konvergentní řada, tedy z Weierstrassova kritéria řada konverguje. Ale f není spojitá v žádném bodě $[0,1]$.
   - (a$\to$c) Protože f je spojitá, je spojitá i $|f|$. Spojitá $|f|$ nabývá maxima, tedy $\exists x_0$: $|f(x)| \leq |f(x_0)| < 1$. Tedy $\sigma_n = |f^n(x)| = |f^n(x_0)|$. Ale $\sum_{n=1}^{\infty} |f^n(x_0)|$ konverguje. Tedy (c) platí.

5. Pravda nebo nepravda?

   (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a,b]$ a $(b,c]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,c]$.
   Řešení: Pravda. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak $\exists n_1$ tak, že $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \geq n_1$ je

   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

   Stejně tak $\exists n_2$ tak, že $\forall x \in (b,c]$ $\forall n \geq n_2$

   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

   Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a položme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pak pro $\forall x \in [a,c]$ je

   $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

   (b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots, A_M$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{M} A_i$.
   Řešení: Pravda, analogicky (a).

   (c) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
   Řešení: Nepravda. Protipříklad: $f_n = x^n$, $A_i = [0, 1 - 1/i]$.

   (d) Nechť K je kompakt. Pak $f_n \rightrightarrows$ na K právě tehdy, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na K.

Řešení: Zjevně platí "$\Rightarrow$".

Pro "$\Leftarrow$" předpokládejme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$. Tedy pro každé $x \in K$ existuje otevřené okolí B_x tak, že $f_n \rightrightarrows$ na $K \cap B_x$. Systém B_x tvoří otevřené pokrytí K, tedy lze vybrat konečné podpokrytí. Tvrzení pak plyne z (b).