4. cvičení - Řady funkcí - derivace

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Bolzano-Cauchyova podmínka)**.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n,\ m \geq n \geq n_0\, \forall x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

Věta 2 (Záměna sumy a derivace)**.** Nechť (a, b) je neprázdný omezený interval a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí splňující:

1. f_n má vlastní **derivaci** na (a, b),
2. existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ **konverguje**,
3. řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a, b).

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Příklady

(Některé máme od: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prazak/vyuka/)

1. Vyšetřete konvergenci řad (může dojít na BC podmínku).

   (a)❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2}$

   (b)✻ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4 + x^2}$

2. (a) Spočtěte $f'(0)$ (vyjádřete jako řadu):

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

   (b) Spočtěte derivaci funkce (vyjádřete jako řadu):

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$$

   (c) Uvažujte funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, kde

   $$f_n(x) = \frac{\sin \frac{x}{n}}{n + x^2}.$$

   i. Ukažte, že f je dobře definována na $\mathbb{R}$.

ii. ♡ Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

iii. Rozhodněte, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

iv. Spočtěte derivaci funkce f na $\mathbb{R}$ (vyjádřete jako řadu).

(d)✿ Dokažte, že pro Riemannovu zeta funkci

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

platí $\zeta \in C^1(1, \infty)$.

Zkouškové příklady

3. Uvažujte funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

(a) Určete, pro která x je f definována.

(b)❄ Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.

(c)✿ Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

Bonus

(Některé máme od: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/MA4_cviceni.pdf)

4. Nechť $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

(a) Funkce f je spojitá a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

(b) Funkce f je spojitá skoro všude a $|f(x)| < 1$ pro každé $x \in [0, 1]$.

(c) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (f(x))^n$ je stejnoměrně konvergentní na $[0, 1]$.

5. Pravda nebo nepravda?

(a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $[a, b]$ a $(b, c]$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, c]$.

(b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots, A_M$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{M} A_i$.

(c) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na množinách $A_1, A_2, \ldots$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(d) ♡ Nechť K je kompakt. Pak $f_n \rightrightarrows$ na K právě tehdy, když $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na K.

Poznámka 3 (Negace B-C podmínky)**.**

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall n_0 \, \exists m, n, \, m \geq n \geq n_0 \, \exists x \in M : \left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| \geq \varepsilon.$$

(1a) $x = 1/(2n_0)$, $n = n_0 + 1$, $m = 2n_0$ (1b) $x = n_0^2$, $n = n_0 + 1$, $m = 2n_0$ (2cii) plyne z (2ciii) (2d) řešte na intervalech $(1 + \epsilon, \infty)$	(3bc) řešte na vhodných malých intervalech (5d) Kompakt = z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí