3. cvičení - Řady funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řad - zjistěte, pro jaká x řady konvergují (jako řady čísel); na jakém intervalu řady konvergují stejnoměrně a lok. stejnoměrně; na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Jde o geometrickou řadu, která konverguje právě pro $x \in (-1, 1)$.
   - Stejnoměrná konvergence pro $x \in (-1, 1)$.
     Z přednášky víme, že $x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1, 1)$. Tedy řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence.
     Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \not\rightrightarrows$ na $(-1, 1)$.
   - Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $[-a, a]$, kde $0 < a < 1$. Zafixujme n a hledejme
     $$\sigma_n = \sup\{|x^n|, x \in [-a, a]\}$$
     Zřejmě $\sigma_n = a^n$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ konverguje (jako řada čísel, jde o geometrickou řadu), tak z Weierstrassova kritéria
     $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [-a, a],$$
     tedy
     $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } (-1, 1).$$
   - Protože x^n jsou spojité funkce, tak z věty o řadě a spojitosti plyne, že součet řady je spojitá funkce na $(-1, 1)$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$

   Řešení: Pracujeme na množině $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Jinak lze převést na předchozí případ.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$

   Řešení:

   - Bodová konvergence: Pro $x = 0$ zjevně konverguje.
     Pro $x > 0$ máme geometrickou řadu
     $$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n,$$

která konverguje.
Pro $x < 0$ není splněna nutná podmínka konvergence, protože $\lim_{n\to\infty} x^2 e^{-nx} = \infty$.
Bodově konverguje tedy právě pro $x \in [0, \infty)$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup \left\{ \left| \frac{x^2}{e^{nx}} \right|, x \in [0, \infty) \right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\frac{x^2}{e^{nx}} \right)' = xe^{-nx}(2 - nx)$$

Nulové body: $x = \frac{2}{n}$.
Krajní body: $f_n(0) = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = f_n \left(\frac{2}{n} \right) = \frac{4}{n^2 e^2}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 e^2}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in [0, \infty)$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $[0, \infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$, $x \in [0, \infty)$

Řešení:

- Bodová konvergence:
Pro $x = 0$ jde o nulovou řadu, tedy konverguje.
Pro $x \in (0, \infty)$ je z Cauchyova kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n e^{-nx}} = xe^{-x} < 1,$$

což lze zjistit z průběhu funkce xe^{-x}.
Tedy řada konverguje pro $x \in [0, \infty)$.

- Stejnoměrná konvergence pro $x \in [0, \infty)$. Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|x^n e^{-nx}|, x \in [0, \infty)\}$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací. Máme

$$(x^n e^{-nx})' = nx^{n-1}(1 - x)$$

Nulové body: $x = 1$. Máme

$$|f_n|(1) = e^{-n}$$

Krajní body:

$$|f_n|(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} |x^n e^{-nx}| = 0.$$

Tedy $\sigma_n = e^{-n}$.
Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ konverguje (jako řada čísel, jde o geometrickou řadu), tak z Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [0,\infty),$$

- Protože f_n jsou spojité funkce, tak z věty o řadě a spojitosti plyne, že součet řady je spojitá funkce na $[0,\infty)$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu má smysl vyšetřovat jen pro $x \geq 0$. Řada pak konverguje, LSK s $\frac{1}{n^3}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}\right|, x \in [0,\infty)\right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}\right)' = \frac{n(n^4 - 3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4 + x^2)^2}$$

Nulové body: $x = \frac{n^2}{\sqrt{3}}$.
Krajní body: $f_n(0) = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = f_n\left(\frac{n^2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{n \cdot \frac{n}{\sqrt[4]{3}}}{n^4 + \frac{n^4}{3}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in [0,\infty)$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $[0,\infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (LSK s $\frac{1}{n^4}$, pro $x=0$ je identicky nulová).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\frac{nx}{1+n^5x^2}\right)' = \frac{n(1-n^5x^2)}{(1+n^5x^2)^2}$$

Nulové body: $x = \pm\frac{1}{n^{5/2}}$.
Krajní body:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = f_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (LSK nebo SK s $\frac{1}{n^2}$, pro $x=0$ je identicky nulová).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{x^2}{1+n^2x^2}\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Odhady pro $x \neq 0$:

$$\frac{x^2}{1+n^2x^2} \leq \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}$$

Pro $x = 0$ je také

$$\frac{x^2}{1+n^2x^2} = 0 \leq \frac{1}{n^2}$$

Tedy supremum

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n^2}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.

Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: pro $x = 0$ řada zřejmě diverguje, pro $x \neq 0$ konverguje srovnánímm s $\frac{1}{n^2}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right|, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}.$$

Pro bod $x = \frac{1}{n}$ máme

$$\sigma_n \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, tedy o stejnoměrné konvergenci nelze rozhodnout.

Zkusíme vyšetřit nutnou podmínku. Máme $f_n \to 0$. Ale $\sigma_n = \frac{1}{2} \not\to 0$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \not\rightrightarrows$$

na $\mathbb{R}$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $[a, \infty)$, kde $0 < a$ (analogicky $(-\infty, -a]$ pro $(-\infty, 0)$). Zafixujme n a hledejme

$$\sigma_n = \sup\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}, x \in [a, \infty)\right\}$$

Zřejmě $\sigma_n = \frac{1}{a^2n^2+1}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ konverguje (jako řada čísel, lze srovnat s $\frac{1}{n^2}$), tak z Weierstrassova kritéria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [a, \infty),$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } (0, \infty).$$

Analogicky

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } (-\infty, -a],$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } (-\infty, 0).$$

Protože f_n jsou spojité funkce na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)$

Řešení:

- Bodová konvergence: Pro $x = 0$ zjevně konverguje. Pro $x \neq 0$ konverguje z LSK s $\frac{1}{n^3}$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Extrémy budeme hledat pomocí derivací:

$$\left(\arctan\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)\right)' = \frac{2\left(-x^2+n^3\right)}{4x^2+\left(x^2+n^3\right)^2}$$

Nulové body: $x = \pm\sqrt{n^3}$.
Krajní body:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0.$$

Tedy supremum je

$$\sigma_n = |f_n|\left(\pm\sqrt{n^3}\right) = \arctan\frac{2\sqrt{n^3}}{2n^3} = \arctan\frac{1}{n^{3/2}}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje srovnáním s $\frac{1}{n^{3/2}}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$

Řešení:

- Bodová konvergence: pro $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\left|\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

- Stejnoměrná konvergence Stejně tak lze odhadnout supremum

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows .$$

Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Na celém $\mathbb{R}$ řada konverguje (SK s $\frac{1}{n^\alpha}$).
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Odhady

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$$

na $x \in \mathbb{R}$.

Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

(l)♡ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n\log^2 n}\right)$

Řešení:

- Bodová konvergence: Řadu vyšetřujeme pro $x \in \mathbb{R}$. Máme odhad $\log(1+t) \leq t$ pro $t > -1$. Tedy

$$\log\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n\ln^2 n}$$

Navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n\ln^2 n}$ konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujeme

$$\sigma_n = \sup\left\{\left|\log\left(1 + \frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\right|, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Krajní body:
$$\lim_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) = \infty$$
Tedy supremum
$$\sigma_n = \infty,$$
tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ nekonverguje, tedy takto o stejnoměrné konvergenci řady nelze rozhodnout.

- Nutná podmínka: Bodová limita: zafixujeme $x \in \mathbb{R}$, pak
$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) = 0.$$
Supremový test: Neboť $\sigma_n = \infty$, tak máme
$$f_n \not\rightrightarrows \text{ na } \mathbb{R}.$$
- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme interval $[-a, a]$, kde $0 < a$. Zafixujme n a hledejme
$$\sigma_n = \sup\left\{\log\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), x \in [-a, a]\right\}$$
Zřejmě $\sigma_n = \frac{a^2}{n\log^2 n}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, tak z Weierstrassova kritéria
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } [-a, a],$$
tedy
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} \text{ na } \mathbb{R}.$$
Protože f_n jsou spojité funkce na $\mathbb{R}$, tak dle věty o řadě a spojitosti je tamtéž spojitá i funkce $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Bonus

2. Ukažte, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně na (a, b), konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně na (a, b).

Řešení: Plyne z B-C podmínky. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na (a, b). Pak
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0\, \forall m, n,\, m \geq n \geq n_0\, \forall x \in (a, b) : \left|\sum_{j=n}^{m} |f_j(x)|\right| < \varepsilon.$$
Zvolme ε a uvažujme n_0, $m, n \geq n_0$ jako výše. Pak
$$\left|\sum_{j=n}^{m} f_j(x)\right| \leq \left|\sum_{j=n}^{m} |f_j|(x)\right| < \varepsilon,$$
tedy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje.

3. (a) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1)$. Může být f neomezená?

Řešení: Ano.

Uvažujme $f_n = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$. Pak $f_n \to \frac{1}{x}$. Navíc

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} |f_n - f| = \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| \to 0.$$

Tedy $f_n \rightrightarrows f$. Ale f je neomezená na $(0,1)$.

(b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $(0,1)$. Nechť f_n jsou omezené. Může být f neomezená?

Řešení: Ne.

Zvolme $\varepsilon = 1$. Z definice stejnoměrné spojitosti existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ a $x \in (0,1)$ je

$$|f_n(x) - f(x)| < 1.$$

Zvolme pevné $n \geq n_0$. Protože f_n jsou omezené, tak existuje $M \geq 0$ tak, že pro každé $x \in (0,1)$ je

$$|f_n(x) \leq M|.$$

Dohromady pro každé $x \in (0,1)$ platí

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M.$$

(c) Nechť $g_n \to g$, g jsou omezené funkce. Může být g neomezená?

Řešení: Ano. Např. $g_n = \frac{n}{nx+1}$ na $(0,1)$. Pak $g_n \to \frac{1}{x}$, $|g_n| \leq n$, ale $\frac{1}{x}$ není omezená.