2. cvičení - Posloupnosti funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 2 (Stejnoměrná konvergence a spojitost.)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou **spojité** funkce. Nechť navíc $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M. Pak f je také **spojitá** na M.

Věta 3 (Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu.)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval (i neomezený) a $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.

Věta 4 (Moore-Osgood)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Nechť navíc

1. $\exists r > 0$: $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n$: $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Věta 5 (Dini)**.** Nechť (X, ρ) je kompaktní metrický prostor a $\{f_n\}$ **monotónní** posloupnost **spojitých** zobrazení X do $\mathbb{R}$. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je **spojité** a $f_n \to f$ na X. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na X.

Algoritmus

1. Určíme **bodovou** limitu. Určíme i **interval** I, kde posloupnost konverguje.
2. Vyšetříme, zda posloupnost **stejnoměrně konverguje** na celém I.
   (a) Zkusíme supremový test na stejnoměrnou konvergenci (na celém I).
   (b) Dini.
   (c) Zkusíme konvergenci vyvrátit.
      i. Moore-Osgood.
      ii. Nespojitá f.
3. Pakliže funkce **nekonverguje** na celém I:
   (a) Identifikujeme **problematické body**. Zafixujeme interval $[a, b]$ tak, aby obsahoval problematické body, a zkusíme **vyvrátit** konvergenci.
   (b) Zkusíme určit **lokálně stejnoměrnou konvergenci**. Zafixujeme interval $[a, b]$, který **neobsahuje** probl. body a **vyšetříme konvergenci**.
4. Napíšeme **závěr**.

Příklady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~bouchala/Vyuka/MFF-NMMA201-1819/Cv08%20-%20Stejnom%c4%9brn%c3%a1%20konvergence%20II%20-%20posloupnosti%20funkc%c3%ad%202.pdf

1. Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$

   (b)❄ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ na $(0, \infty)$

   (c)✽ $f_n(x) = \dfrac{\log(nx)}{n}$ na $(0, \infty)$

   (d) $f_n(x) = \dfrac{x}{n} \log \dfrac{x}{n}$ na $(0, \infty)$

   (e)♡ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$

   (f)✿ $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0, \infty)$

   (g) $f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n$ na $[0, \infty)$

   (h)❀ $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$ na $[0, \infty)$

2. **Dini**: Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ na $(0, 1)$, jen $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$

   (b)❄ $f_n(x) = x^{\frac{n+1}{2n-1}}$ na $[0, \infty)$

Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = n \arctan \dfrac{x}{n}$

   (b) $f_n(x) = \left|\cos \dfrac{x}{n}\right|^n$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x+n}{\sqrt{x^2+n^2}}$

   (d) $f_n(x) = e^{\frac{|x|-n}{|x|+n}} + e^{-\frac{|x|-n}{|x|+n}}$

   (e) $f_n(x) = \dfrac{e^{\frac{\sqrt{x}}{n}} - 1}{\tan(\frac{1}{n})}$, $[0, \infty)$

   (f) $f_n(x) = \dfrac{\log(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}$

Bonus

Věta 6. Nechť (a, b) je **omezený** interval, $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$. Nechť

(a) f_n mají vlastní derivaci na (a, b),

(b) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje,

(c) $\{f_n'\}$ konverguje stejnoměrně na (a, b).

Pak existuje funkce f taková, že $f_n \rightrightarrows f$ na (a, b), f má vlastní derivaci na (a, b) a platí $f_n' \rightrightarrows f'$ na (a, b).

4. Nechť $f_n = \frac{1}{n}\arctan(x^n)$ na $(0,\infty)$. Ukažte, že f_n konverguje stejnoměrně k jisté f, ale není pravda, že $f_n' \rightrightarrows f'$.

5. Nechť $f_n = \sin\frac{x}{n^2}$. Najděte bodovou limitu, ověřte (lokálně) stejnoměrnou konvergenci. Najděte derivace a ověřte předpoklady Věty o derivacích. Ukažte, že závěry věty platí.

Věta 7. Nechť (a,b) je **omezený** interval, $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ a $f_n \in \mathcal{C}([a,b])$. Pak

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

6. Nechť f_n je definována takto: $f_n(0) = \frac{1}{n}$, mimo interval $[-n,n]$ je konstantně nulová a na intervalu $[-n,n]$ je dodefinována lineárně. Načrtněte první 3 funkce (vyjdou takové špičaté kopečky). Ověřte, zda $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n = \int_{-\infty}^{\infty}\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ nebo ne. Pak ověřte předpoklady věty nebo najděte předpoklad, který není splněný.

(1b) na $[a,b]$ je $\frac{x^2+x}{1+n+x} \leq \frac{b^2+b}{1+n}$
(1c) log může být i záporný;)
(1e) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, pak odhady
(1f) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, pak odhady
(1h) 2 policajti, rozdělte na intervaly $[0,3]$, $[3,\infty)$
(2b) Dini pro $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$, rozdělte na $[0,1]$ a $[1,b]$