# 1. cvičení - Posloupnosti funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

Zdroj většiny příkladů: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

1. Vyšetřete konvergenci funkcí (najděte bodovou limitu, vyšetřete stejnoměrnou konvergenci a lok. stejnom. konvergenci). Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$

   **Řešení:**

   - Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2n^2}{x^2n^2} \cdot \frac{x}{\frac{1}{n^2x^2}+1} = x.$$
   Pro $x = 0$ máme $f_n(0) = 0$, tedy i $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
   Dohromady, $f = x$.
   - Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
   $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$
   Odhadujeme tedy výraz
   $$\left| \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} - x \right|$$
   Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
   $$\left( \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} - x \right)' = -\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$
   Nulové body:
   $$x^2 = \frac{1}{n^2},$$
   tedy $x = \pm\frac{1}{n}$. Platí
   $$|f_n - f| \left( \pm\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2n}.$$
   Supremum ještě můžeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme
   $$\lim_{x\to\pm\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} \left| \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} - x \right| = 0.$$
   Dohromady máme
   $$\sigma_n = \frac{1}{2n}.$$
   Navíc platí
   $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$
   Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
   $$f_n \rightrightarrows f \text{ na } \mathbb{R}.$$

- Protože stejnoměrná konvergence implikuje lokálně stejnoměrnou konvergenci, tak i
$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \text{ na } \mathbb{R}.$$
na $\mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$.
**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in [0,1]$. Pak z růstové škály
$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0.$$
Tedy, $f = 0$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0,1]\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$|nx(1-x)^n|\,.$$
Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
$$\begin{aligned}(nx(1-x)^n)' &= n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}(n(1-x) - n^2x)\\ &= (1-x)^{n-1}(x(-n(1+n)) + n)\end{aligned}$$
Nulové body:
$$x = \frac{1}{n+1}.$$
Platí
$$(f_n - f)\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
Supremum ještě můžeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme
$$|f_n(x) - f(x)|(0) = |f_n(x) - f(x)|(1) = 0$$
Dohromady máme
$$\sigma_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
Navíc platí
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}.$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
na $[0,1]$.
- Stejnoměrná konvergence a lokálně stejnoměrná konvergence na kompaktu splývá. Tedy i
$$f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f.$$
na $[0,1]$.

- Uvažujme tedy interval $(0,1)$.
  Problematické body: $x = 0$. Uvažujme tedy $a \in (0,1)$ a interval $(a,1)$. Pak zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
  $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (a,1)\}.$$
  Odhadujeme tedy výraz
  $$|nx(1-x)^n|\,.$$
  Z předchozího postupu víme, že nulový bod derivace je v bodě $x_0 = \frac{1}{n+1}$. Od jistého $n_0$ tento bod neleží v intervalu $(a,1)$.
  Extrémy tedy budeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme
  $$|f_n(x) - f(x)|(a) = |na(1-a)^n|, \qquad |f_n(x) - f(x)|(1) = 0$$
  Dohromady máme od jistého $n_0$
  $$\sigma_n = |na(1-a)^n|$$
  Navíc platí
  $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} |na(1-a)^n| = 0$$
  Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
  $$f_n \rightrightarrows f.$$
  na $(a,1)$.
  Odtud tedy plyne, že
  $$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } (0,1).$$
- Zbývá vyšetřit okolí bodu 0. Uvažujme tedy $b \in (0,1)$ a interval $[0,b)$. Pak zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
  $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [0,b)\}.$$
  Z předchozího postupu víme, že nulový bod derivace je v bodě $x_0 = \frac{1}{n+1}$. Od jistého $n_0$ tento bod náleží intervalu $[0,b)$.
  Dohromady máme od jistého $n_0$
  $$\sigma_n \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$
  Navíc platí
  $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \geq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}.$$
  Závěr:
  $$f_n \not\rightrightarrows f, \qquad \text{na } [0,b) \quad \forall b \in (0,1)$$
  $$\text{a } f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } [0,1).$$

(c) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
**Řešení:**

- Bodová konvergence: Rozepišme funkce jako $f_n(x) = x^n(1-x)$. Pak pro $x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ posloupnost $f_n(x)$ diverguje.
  Pro $x \in (-1, 1]$ máme
$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x) = 0.$$
  Tedy, $f = 0$ pro $x \in (-1, 1]$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (-1, 1]\}.$$
  Odhadujeme tedy výraz
$$|x^n(1-x)|.$$
  Přímo vidíme, že v krajním bodě je
$$\lim_{x\to -1+} |x^n(1-x)| = 2.$$
  Supremum tedy můžeme odhadnout
$$\sigma_n \geq 2.$$
  Tedy
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$
  Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
  na $(-1, 1]$.
- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $a \in (-1, 1)$ a interval $(a, 1]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (a, 1]\}.$$
  Odhadujeme tedy výraz
$$|x^n(1-x)|.$$
  Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
$$(x^n(1-x))' = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n(1-x) - x)$$
  Nulové body:
$$x = \frac{n}{n+1}.$$
  Platí
$$(f_n - f)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$
  Supremum ještě můžeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme
$$|f_n(x) - f(x)|(1) = 0$$

a

$$|f_n(x) - f(x)|(a) = |a^n(1-a)|.$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0 = \lim_{n\to\infty} |a^n(1-a)|.$$

Protože

$$\sigma_n = \max\left\{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}, 0, |a^n(1-a)|\right\},$$

tak

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$$

Tedy

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } (a, 1].$$

Odtud

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } (-1, 1].$$

(d) $f_n(x) = e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2} = 0.$$

Tedy, $f = 0$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|e^{-\left|x-\frac{1}{n}\right|n^2}\right|.$$

Lze rovnou dosadit $x = \frac{1}{n}$. Pak

$$\sigma_n \geq \left|e^{-\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right|n^2}\right| = 1.$$

Dále

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

na $\mathbb{R}$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence:
  Problematické body: $x = 0$. Uvažujme $a > 0$ a interval $(-a, a)$. Pak zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (-a, a)\}.$$

  Jako výše lze od jistého $n_0$ dosadit $x = \frac{1}{n}$. Pak

$$\sigma_n \geq 1$$

  Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f.$$

  na $(-a, a)$.
  Odtud tedy plyne, že

$$f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

(e) $f_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{nx}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(nx)}{nx} = 0$$

  (omezená a mizející posloupnost).
  Tedy $f = 0$.
- Stejnoměrná konvergence: Máme

$$\lim_{x\to 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0,$$

  ale

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

  Cože je spor Větou o limitě. Tedy

$$f_n \not\rightrightarrows f$$

  na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(f) $f_n(x) = \log(x) \sin\left(\dfrac{x}{n(1+x^2)}\right)$ na $(0, \infty)$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in (0, \infty)$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \log(x) \sin\left(\frac{x}{n(1+x^2)}\right) = 0.$$

  Tedy $f = 0$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a odhadujme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|\log(x)\sin\left(\frac{x}{n(1+x^2)}\right)\right| \leq \left|\log(x)\cdot\frac{x}{n(1+x^2)}\right| \leq \begin{cases} \left|\log(x)\frac{x}{n}\right|, & x \in (0,1], \\ \left|\log(x)\frac{1}{nx}\right|, & x \in [1,\infty), \end{cases}$$

Na intervalu $[0,1]$ lze funkci $|x\log x|$ spojitě dodefinovat (nulou v 0) a tedy tam nabývá maxima, označme jej $b$.
Na intervalu $[1,\infty)$ je funkce $\left|\frac{\log x}{x}\right|$ spojitá, navíc $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\log x}{x}\right| = 0$. Tedy také nabude maxima, označme jej $c$.
Dohromady máme

$$\sigma_n \leq \max\left\{\frac{b}{n}, \frac{c}{n}\right\}$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $(0,\infty)$.

- Protože stejnoměrná konvergence implikuje lokálně stejnoměrnou konvergenci, tak i

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f.$$

na $(0,\infty)$.

(g) $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n^2x^2} = 0.$$

Pro $x = 0$ je $\lim_{n\to\infty} e^{-n^2} = e^0 = 1$. Tedy, $f = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$

- Stejnoměrná konvergence: Jednotlivé funkce $f_n$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, ale jejich limita spojitá není. Tedy nemohou konvergovat stejnoměrně ani lokálně stejnoměrně. Závěr:

$$f_n \not\rightrightarrows f, \qquad f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f$$

na $\mathbb{R}$.

(h) $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}\}$. Pak
$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} = 1.$$
Tedy, $f = 1$.
- Stejnoměrná konvergence: Máme
$$\lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1,$$
ale
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$
Cože je spor Větou o limitě. Tedy
$$f_n \not\rightrightarrows f$$
na $\mathbb{R}$.
- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $a > 0$ a interval $[-a, a]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [-a, a]\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$\left| e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 \right|$$
Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
$$\left( e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 \right)' = e^{-\frac{x^2}{n}} \cdot \frac{(-2x)}{n}$$
Nulové body:
$$x = 0.$$
Platí
$$(f_n - f)(0) = 0.$$
Supremum ještě můžeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme
$$|f_n(x) - f(x)|(\pm a) = 1 - e^{-\frac{a^2}{n}}.$$
Tedy
$$\sigma_n = 1 - e^{-\frac{a^2}{n}}.$$
Navíc platí
$$\lim_{n\to\infty} 1 - e^{-\frac{a^2}{n}} = 0.$$
Tedy
$$f_n \rightrightarrows f \qquad \text{na } (-a, a).$$
Odtud
$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

(i) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in (0,1)$. Pak
$$\lim_{n\to\infty} x^{2n} - x^{3n} = 0 - 0 = 0.$$
Tedy, $f = 0$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$\left|x^{2n} - x^{3n}\right|$$
Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy
$$(x^{2n} - x^{3n})' = nx^{2n-1}(2 - 3x^n).$$
Nulové body:
$$x = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}.$$
Platí
$$(f_n - f)\left(\sqrt[n]{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
Pak ale
$$\sigma_n \geq \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
Navíc platí
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$$
Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že
$$f_n \not\rightrightarrows f.$$
na $(0,1)$.
- Lokálně stejnoměrná konvergence: Problematické body: $x = 1$. Uvažujme $q \in (0,1)$ a interval $(0,q)$.
Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme
$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in (0,q)\}.$$
Odhadujeme tedy výraz
$$\left|x^{2n} - x^{3n}\right|.$$
Z předchozího postupu víme, že nulový bod derivace je v bodě $x_0 = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$. Od jistého $n_0$ tento bod neleží v intervalu $(0,q)$.
Extrémy tedy budeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme
$$|f_n(x) - f(x)|(0) = 0, \qquad |f_n(x) - f(x)|(q) = q^{2n} - q^{3n}$$

Dohromady máme od jistého $n_0$

$$\sigma_n = |q^{2n} - q^{3n}|$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} |q^{2n} - q^{3n}| = 0$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $(0, q)$.
Odtud tedy plyne, že

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } (0,1).$$

2. Najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci, případně najděte **intervaly**, kde posloupnost konverguje stejnoměrně.

   (a) $f_n(x) = x^n e^{-x^2/n}$ na $(-1, 1)$

   **Řešení:**

   - Bodová konvergence: zafixujme $x \in (-1, 1)$. Pak

     $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{e^{x^2/n}} = \frac{0}{1} = 0.$$

     Tedy, $f = 0$.
   - Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

     $$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

     Odhadujeme tedy výraz

     $$\left|\frac{x^n}{e^{x^2/n}}\right|$$

     Funkce $f_n(x)$ je sudá pro sudé $n$ a lichá pro liché $n$. Stačí tedy vyšetřovat supremum na intervalu $[0, 1)$.
     Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

     $$\left(\frac{x^n}{e^{x^2/n}}\right)' = \frac{nx^{n-1}e^{x^2/n} - x^n e^{x^2/n}\frac{1}{n}2x}{(e^{x^2/n})^2}$$

     Nulové body:

     $$x^{n-1}e^{x^2/n}\left(n - x\frac{1}{n}2x\right) = 0$$

     $$n = 2x^2\frac{1}{n}$$

     $$\frac{n^2}{2} = x^2$$

     Tedy

     $$x = \pm\frac{n}{\sqrt{2}}$$

Ale pro $n \geq 2$ platí, že $\pm\frac{n}{\sqrt{2}} \notin (-1,1)$.
Extrémy tedy budeme hledat v krajních bodech, tedy zkoumáme

$$|f_n(x) - f(x)|(0) = 0, \qquad |f_n(x) - f(x)|(1) = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$$

Tedy $\sigma_n = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$ a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 1 \neq 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f$$

na $(-1,1)$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Problematické body: $x = \pm 1$. Uvažujme $q \in (0,1)$ a interval $[-q,q]$.
Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [-q,q]\}.$$

Z předchozího postupu víme, že extrémy budeme hledat v krajních bodech intervalu $(-q,q)$.

$$|f_n(x) - f(x)|(-q) = |f_n(x) - f(x)|(q) = \frac{q^n}{e^{q^2/n}}.$$

Tedy

$$\sigma_n = \frac{q^n}{e^{q^2/n}}.$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{e^{q^2/n}}. = 0$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $[-q,q]$.
Odtud tedy plyne, že

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } (-1,1).$$

(b) $f_n(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2} = 1.$$

Tedy, $f = 1$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left|\frac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2} - 1\right| = \left|\frac{-2x^2}{n^2 + x^2}\right|$$

Uvažujme limity v krajních bodech:

$$\lim_{x \to \infty} \left|\frac{-2x^2}{n^2 + x^2}\right| = |-2| = 2.$$

Tedy

$$\sigma_n \geq 2$$

a

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n \neq 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f$$

na $\mathbb{R}$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $q \in (0, 1)$ a interval $[-q, q]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [-q, q]\}.$$

Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

$$\left(\frac{-2x^2}{n^2 + x^2}\right)' = \frac{-4x(n^2 + x^2) + 2x^2 2x}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{-4xn^2}{(n^2 + x^2)^2}$$

Nulové body:

$$x = 0$$

Navíc platí

$$|f_n(x) - f(x)|(0) = 0$$

Z předchozího postupu víme, že extrémy budeme hledat v krajních bodech intervalu $(-q, q)$.

$$|f_n(x) - f(x)|(-q) = |f_n(x) - f(x)|(q) = \frac{2q^2}{n^2 + q^2}$$

Tedy

$$\sigma_n = \frac{2q^2}{n^2 + q^2}$$

Navíc platí

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2q^2}{n^2 + q^2} = 0$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $[-q, q]$.
Odtud tedy plyne, že

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

(c) $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$

**Řešení:**

- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \cdot x = x.$$

  Pro $x = 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{0}{n} = 0$$

  .
  Tedy, $f = x$.

- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

  Odhadujeme tedy výraz

$$\left| n \sin \frac{x}{n} - x \right| =$$

  Zkusíme najít extrémy pomocí derivace, tedy

$$\left( n \sin \frac{x}{n} - x \right)' = \cos \frac{x}{n} - 1$$

  Nulové body:

$$\cos \frac{x}{n} = 1$$
$$\frac{x}{n} = 0 + 2k\pi x \quad = 2k\pi n,$$

  kde $k \in \mathbb{Z}$.
  Pak máme

$$|f_n(x) - f(x)|(2k\pi n) = |n \sin(2k\pi) - 2k\pi n| = |n \cdot 0 - 2k\pi n| = |2k\pi n|$$

  Tedy

$$\sigma_n \geq |2k\pi n|$$

  a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0.$$

  Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \not\rightrightarrows f$$

  na $\mathbb{R}$.

- Lokálně stejnoměrná konvergence: Uvažujme $q \in (0, \infty)$ a interval $[-q, q]$. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in [-q, q]\}.$$

Z předchozího postupu víme, že nulové body jsou $x = 2k\pi n$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Od jistého $n_0$ tyo body nenáleží intervalu $[-q, q]$.
Tedy extrémy budeme hledat v krajních bodech intervalu $[-q, q]$.

$$|f_n(x) - f(x)|(-q) = |f_n(x) - f(x)|(q) = |n \sin \frac{q}{n} - q|$$

Tedy

$$\sigma_n = |n \sin \frac{q}{n} - q|$$

Navíc platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} |n \sin \frac{q}{n} - q| = 0$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f.$$

na $[-q, q]$.
Odtud tedy plyne, že

$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f, \qquad \text{na } \mathbb{R}$$

(d) $f_n(x) = x \arctan(nx)$
**Řešení:**
- Bodová konvergence: zafixujme $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} x \arctan(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2}x, & x < 0, \end{cases}$$

Tedy, $f = \frac{\pi}{2}|x|$.
- Stejnoměrná konvergence: Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a hledejme

$$\sigma_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in \mathbb{R}\}.$$

Odhadujeme tedy výraz

$$\left| x \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}|x| \right|$$

Platí $x \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}|x| \geq 0$, navíc $x \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}|x|$ je sudá funkce, tedy stačí uvažovat $x \geq 0$. Máme tedy

$$\begin{aligned} \left| x \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}|x| \right| &= -\left( x \arctan(nx) - \frac{\pi}{2}|x| \right) = x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan nx \right) \\ &= x \operatorname{arccot}(nx) \end{aligned}$$

Navíc pro $t > 0$ platí vztahy (lze ověřit derivací).

$$\frac{\pi}{2} - \arctan t = \operatorname{arccot} t = \arctan \frac{1}{t}$$

Dále pro $t > 0$ platí

$$0 < \frac{\arctan t}{t} < 1,$$

tedy

$$\arctan t < t.$$

Odtud plyne, že pro $x > 0$ máme:

$$x \operatorname{arccot}(nx) = x \arctan \frac{1}{nx} < x \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}$$

Tedy

$$\sigma_n \leq \frac{1}{n}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0.$$

Z kritéria stejnoměrné konvergence pak plyne, že

$$f_n \rightrightarrows f$$

na $\mathbb{R}$.

**Věta 1** (Diniho věta)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je **omezený** interval a $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou **spojité** funkce. Je-li $\{f_n(x)\}$ pro každé $x \in [a, b]$ **monotónní** a **omezená** a je-li funkce $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ **spojitá** na $[a, b]$, pak $f_n \rightrightarrows f$.

3. ♡ Ukažte, že vynechání byť jediného předpokladu Diniho věty způsobí její neplatnost:
   (a) kompaktnost intervalu $[a, b]$,
   (b) spojitost $f_n$,
   (c) spojitost $f$,
   (d) monotonie $f_n(x)$.

   Tedy najděte $f_n \to f$ takové, že splňují vždy všechny podmínky až na jednu, ale přitom $f_n \not\rightrightarrows f$.

   **Řešení:** Příklad i s řešením máme odtud: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

   (a) kompaktnost intervalu $[a, b]$,
   **Řešení:** Uvažujme interval $[0, 1)$ a $f_n = x^n$. Pak $f_n \not\rightrightarrows$ na $[0, 1)$ (příklad z přednášky).
   (b) spojitost $f_n$,
   **Řešení:** Uvažujme interval $[0, 1]$, $f_n = \chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$. Bodovou limitou je $f = 0$.
   Pak $\sigma_n \geq f_n(1/(2n)) = 1$, tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$ a $f_n \not\rightrightarrows f$.

(c) spojitost $f$,
**Řešení:** Uvažujme interval $[0,1]$ a $f_n = x^n$. Pak $f_n \not\rightrightarrows$ na $[0,1)$ (příklad z přednášky).

(d) monotonie $f_n(x)$.
**Řešení:** Uvažujme interval $[0,1]$ a

$$f_n = \begin{cases} 2nx, & x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ 2 - 2nx, & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Bodová limita je pak $f = 0$.
Pak $\sigma_n \geq f_n(1/(n)) = 1$, tedy $\lim_{n\to\infty} \sigma_n \neq 0$ a $f_n \not\rightrightarrows f$.