1. cvičení - Posloupnosti funkcí

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k funkci f na M, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

pro každé $x \in M$, neboli

$$\forall x \in M\, \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall x \in M\, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na M, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ takové, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na $(x - r, x + r)$. Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$.

Poznámka 2. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$, pak $f_n \to f$ na M.

Věta 3 (Charakterizace stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak

$$f_n \rightrightarrows f$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\} = 0.$$

Věta 4 (Stejnoměrná konvergence a spojitost.)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou **spojité** funkce. Nechť navíc $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M. Pak f je také **spojitá** na M.

Věta 5 (Charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na intervalu.)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval (i neomezený) a $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Pak $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b) právě tehdy, když $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.

Poznámka 6. Tedy stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence na kompaktu splývá.

Věta 7 (Moore-Osgood)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je interval a $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Nechť navíc

1. $\exists r > 0$: $f_n \rightrightarrows f$ na $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n$: $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$.

Pak existují vlastní limity $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny.

Algoritmus

1. Určíme bodovou limitu: zafixujeme x a spočteme $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. (Dáváme pozor na parametr.) Funkci $f(x)$ použijeme v dalším postupu. Nezapomeneme na definiční obor f_n a f.
2. Zkusíme test na stejnoměrnou konvergenci.
   (a) Zafixujeme n a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x) - f(x)|$. Lze použít nějaké **odhady** nebo vyšetřit **extrémy** dané funkce (třeba pomocí první **derivace**). Supremum se pak může realizovat v bodech **maxima** i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.
   (b) Pak spočteme $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$. Stejnoměrnou konvergenci máme právě tehdy, když limita vyjde 0.
3. Stejnoměrnou konvergenci lze **vyvrátit**, pakliže f_n jsou **spojité**, ale f **není**.
4. Stejnoměrnou konvergenci lze **vyvrátit** pomocí Moore-Osgoodovy věty.
5. Pokud posloupnost f_n na celém M stejnoměrně nekonverguje, zkusíme **lokálně stejnoměrnou konvergenci**. Najdeme problematické body - kde jsou nespojitosti f, kde byly extrémy... Pro ostatní x pak najdeme okolí, které se těmto bodům vyhne a znovu aplikujeme test se supremem.
6. Doladíme problematické body a napíšeme **závěr**.

Příklady

Zdroj většiny příkladů a řešení: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda: Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

1. Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^3}{1+n^2x^2}$
   (b)✿ $f_n(x) = nx(1-x)^n$ na $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$.
   (c)❀ $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$
   (d)☆ $f_n(x) = e^{-|x-\frac{1}{n}|n^2}$
   (e)❄ $f_n(x) = \dfrac{\arctan(nx)}{nx}$, jen $\rightrightarrows$, bez $\overset{loc}{\rightrightarrows}$
   (f)❀ $f_n(x) = \log(x)\sin\left(\dfrac{x}{n(1+x^2)}\right)$ na $(0,\infty)$
   (g)✽ $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$
   (h)❅ $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$
   (i) $f_n(x) = x^{2n} - x^{3n}$ na $(0,1)$

2. Vyšetřete konvergenci funkcí – najděte **bodovou** limitu, vyšetřete **stejnoměrnou** a **lokálně** stejnoměrnou konvergenci. Není-li řečeno jinak, vyšetřujte na $\mathbb{R}$.

   (a) $f_n(x) = x^n e^{-x^2/n}$ na $(-1, 1)$

   (b) $f_n(x) = \dfrac{n^2 - x^2}{n^2 + x^2}$

   (c) $f_n(x) = n \sin \dfrac{x}{n}$

   (d) $\heartsuit$ $f_n(x) = x \arctan(nx)$

   Věta 8 (Diniho věta)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je **omezený** interval a $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou **spojité** funkce. Je-li $\{f_n(x)\}$ pro každé $x \in [a, b]$ **monotónní** a **omezená** a je-li funkce $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ **spojitá** na $[a, b]$, pak $f_n \rightrightarrows f$.

3. $\heartsuit$ Ukažte, že vynechání byť jediného předpokladu Diniho věty způsobí její neplatnost:

   (a) kompaktnost intervalu $[a, b]$,

   (b) spojitost f_n,

   (c) spojitost f,

   (d) monotonie $f_n(x)$.

   Tedy najděte $f_n \to f$ takové, že splňují vždy všechny podmínky až na jednu, ale přitom $f_n \not\rightrightarrows f$.

(1b) $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$
(1c) $D_f = (-1, 1]$
(1d) zkuste $f_n(\frac{1}{n})$
(1e) Moore-Osgood, $\lim_{x\to 0}$
(1f) $|\sin x| < |x|$, nederivujte, odhadujte
(1g) f_n spojité, f nikoli
(1h) Moore-Osgood, $\lim_{x\to\infty}$

(2d) $t > 0$: $\frac{\pi}{2} - \arctan t = \arctan \frac{1}{t}$; $t > 0$: $0 < \frac{\arctan t}{t} < 1$
(3a) x^n na $[0, 1)$
(3b) $\xi_{(0,\frac{1}{n})}$ na $[0, 1]$
(3c) x^n na $[0, 1]$
(3d) kopeček o výšce 1 na $[0, \frac{1}{n}]$, jinak 0 na $[0, 1]$