2. písemka

1. (10 bodů) Najděte primitivní funkci k funkci f na co největším možném intervalu
$$f(x) = |(x-2)(x+3)|$$

2. (10 bodů) Najděte primitivní funkci k funkci f na co největším možném intervalu
$$f(x) = \frac{x^2+6x+19}{(x-1)(x^2+4x+8)}$$

3. (10 bodů) Vypočítejte určitý integrál
$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

4. (bonus - 0 bodů)
Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (tedy dokažte nebo najděte protipříklad).
Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$.
   (a) Jestliže je F periodická, pak f je periodická.
   (b) Jestliže je f periodická, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F + c$ je periodická.

$+\, c_0$

(1) $\int |(x-2)(x+3)|\, dx$

$x^2 + x - 6$

$+ \quad - \quad +$

$-3 \qquad 2$

f spojitá na ℝ → má tam PF

1

$$f = \begin{cases} x^2+x-6 & x \in (-\infty,-3] \\ -x^2-x+6 & (-3,2] \\ x^2+x-6 & (2,\infty) \end{cases}$$

3

$$F = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x + C_1 & x \in (-\infty,-3) \\ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + C_2 & x \in (-3,2) \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C_3 & x \in (2,\infty) \end{cases}$$

tedy

2

$$F = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 6x - 27 + C_2 & x \in (-\infty,-3) \\ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + C_2 & x \in [-3,2] \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{44}{3} + C_2 & x \in (2,\infty) \end{cases}$$

2 $\lim\limits_{x \to -3-} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C_1$

$= \lim\limits_{x \to -3+} -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + C_2$

$-9 + \frac{9}{2} + 18 + C_1$

$= 9 - \frac{9}{2} - 18 + C_2$

$C_1 = 18 - 36 - 9 + C_2$

$C_1 = -27 + C_2$

2 $\lim\limits_{x \to 2-} -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x + C_2 =$

$= \lim\limits_{x \to 2+} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C_3$

$-\frac{8}{3} - 2 + 12 + C_2 = \frac{8}{3} + 2 - 12 + C_3$

$C_3 = -\frac{16}{3} - 4 + 24 + C_2$

$C_3 = \frac{44}{3} + C_2$

② $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+19}{(x-1)\underbrace{(x^2+4x+8)}_{\text{nemá kořen}}}\,dx = \int \overset{A}{\frac{2}{x-1}} + \overset{Bx+C}{\frac{-x-3}{x^2+4x+8}}\,dx$

2 $\quad st\,P < st\,Q \qquad A(x^2+4x+8) + (Bx+C)(x-1) = x^2+6x+19$

3 $\quad x=1 \qquad 13A = 26$

$\boxed{A = 2}$

$x = 0 \qquad 16 + (-1C) = 19$

$\boxed{C = -3}$

$x = -1 \qquad 2\cdot 5 + (-B-3)(-2) = 14$

$2B + 6 = 4$

$\boxed{B = -1}$

1 $\quad \displaystyle\int \frac{2}{x-1} \overset{c}{=} 2\log|x-1|$

3 $\quad \displaystyle -\int \frac{x+3}{x^2+4x+8}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} - \int \frac{1}{x^2+4x+8}$

$\downarrow$

$-\frac{1}{2}\log(x^2+4x+8)$

$\displaystyle -\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx = -\int \frac{1}{(x+2)^2+4} = -\int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} \overset{c}{=} -\frac{1}{4}\,2\arctan\frac{x+2}{2}$

dohromady:

1 $\quad \displaystyle\int \overset{c}{=} 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+4x+8) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}$

$x \in (-\infty, 1),\ (1, \infty)$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int_1^2 3 \log y \, dy$

u'

(3) $y = 1 + \sqrt[3]{x}$ $\qquad u = 3y \quad v' = \frac{1}{y}$

$dy = \frac{1}{3} x^{-2/3}\, dx$

x	0	1
y	1	2

(2) $= \left[3y \log y\right]_1^2 - \int_1^2 3\,dy = \left[3y\log y - 3y\right]_1^2$

(1+1) $= 6\log 2 - 6 + 3$

$= 6 \log 2 - 3$

(3) $(\alpha, \beta) = (0,1)$

$(a,b) = (1,2)$ $\qquad \varphi(\alpha,\beta) = (a,b)$

$\varphi = 1 + \sqrt[3]{x}$

$\varphi' = \frac{1}{3x^{2/3}} \neq 0$ na $(0,1)$

(4a) Pravda

Uvažujme periodu $p \in \mathbb{R}$

Pak

$$f(x \pm p) = F'(x \pm p) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x \pm p + h) - F(x \pm p)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

tedy f je p-periodická.

(4b) Nepravda

Např. $f = 3 + \cos x$, $f > 0$, f je 2π-period

$F = \int f$ je rostoucí (má kladnou der.), tedy

nemůže být periodická.