



22. cvičení – Neabsolutní konvergence Newtonova integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) . Dále nechť $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

- (A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.
- (D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Kde jsou **problematické** body?
 - (a) $\pm\infty$
 - (b) Jde funkce v krajním bodě do $\pm\infty$?
 - (c) Jde funkce v krajním bodě do 0, ale je tam **parametr**?
 - (d) Vyskytuje se v krajním bodě výraz $0/0$, $1/0$, ∞/∞ ?
 - (e) Je-li funkce **spojitá** až do kraje **omezeného uzavřeného** intervalu \rightarrow konverguje absolutně.
2. **Mění funkce** na okolí problematického bodu **znaménko**? Je oscilující u nekonečna?
 - (a) **Nemění** znaménko \rightarrow absolutní a neabsolutní konvergence splývá.
 - (b) **Mění** znaménko:
 - i. Je **AK** \rightarrow Pak máme i neabsolutní konvergenci.
 - ii. Není AK nebo na ni nejsme tázáni \rightarrow **Abel - Dirichlet**.
 - iii. Pozor, funkce se může chovat různě v různých bodech.
3. Dáváme **pozor** na **parametry**. Zejména pečlivě ověřujeme, zda jsme zjistili konvergenci i divergenci. Některá kritéria, např. SK nebo Abel-Dirichlet dávají jen jedno z toho.
4. Ověřujeme **podmínky**.
5. **Závěr**.

Příklady

Vyšetřete **absolutní i neabsolutní** konvergenci integrálů, jestliže $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \infty)$.

1. ✿ $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \sin x \, dx$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} \sin x \, dx$

3. ✿ $\int_0^{+\infty} \operatorname{arccot}^\alpha x \cos x \, dx$

4. ✿ $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{x^{3/2}} \sin x \, dx$

5. ♡ $\int_0^{\pi/2} x^a \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)^b \operatorname{tg}^c x \, dx$

6. $\int_0^1 \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)} \, dx$

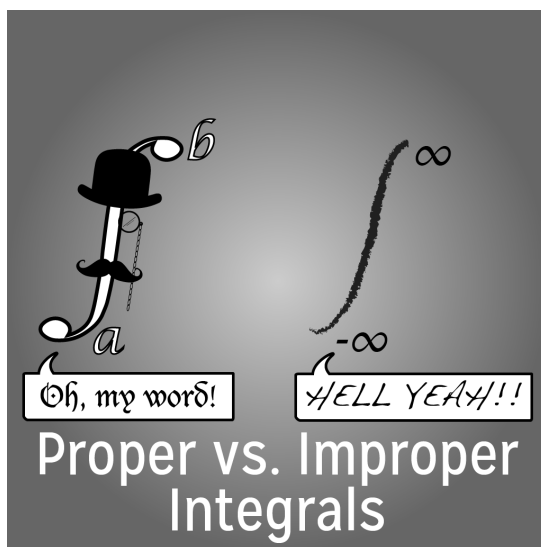
7. ✿ $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x \sin x}{x \arctan(1-x)} \, dx$

8. ☆ $\int_{-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}} \operatorname{arccot} x \sin x \, dx$

9. ✿ $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(\sin x)}{x^\alpha} \sin 2x \, dx$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x}{\ln^\beta(1+x)} \sin x \, dx$

11. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^\alpha x \operatorname{arccot}^\beta x}{x^\gamma} \cos x \, dx$



(1) Uvažuje $\arctan x \cdot \frac{\sin x}{x}$.
 (3) Uvažuje $x^\alpha \operatorname{arccot}^\alpha x \frac{\cos x}{x}$. Monotonie $x \operatorname{arccot} x$: zderivujte a substituujte $x = \cot y$.
 (4) $u \infty: \ln(e^{2x} + e^x + 1) \approx 2x$. Pro monotonii: $\frac{\ln(e^{2x} + e^x + 1)}{2x} = 1 + \frac{\ln(1 + e^{-x} + e^{-2x})}{2x}$
 (5) vyšetřuje jen AK
 (7) Abel 2x
 (8) NElze použít Abela, najdete PF k $e^{\sin x} \sin 2x$
 (9) pro AK u $\infty: |\ln^\beta(1+x)| \leq \sqrt{x}$ od jistého x_β .