21. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[0, \infty)$.
- u 0: Funkce f je spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $[0, 1]$, tedy $\int_0^1 |f|\,\mathrm{d}x$ konverguje.
- u ∞: Odhadneme
$$\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^3}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$
Protože $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak ze SK konverguje i $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Závěr: $\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(b) ♡ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, \frac{\pi}{2})$.
- u 0: Funkci $\tan x$ u 0 srovnáváme s x, tedy $g(x) = x^{\alpha}$. Pak
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan^{\alpha} x}{x^{\alpha}} = 1 \in (0, \infty).$$
Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{\alpha}$. Tedy právě tehdy, když $\alpha > -1$.
- u $\frac{\pi}{2}$: Máme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Funkci $\sin x$ srovnáme s 1, funkci $\cos x$ s $(\frac{\pi}{2} - x)$. Dohromady tedy $g(x) = 1/(\frac{\pi}{2} - x)^{\alpha}$.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\tan^{\alpha} x}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^{\alpha}}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^{\alpha} x}{1} \cdot \left(\frac{(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}\right)^{\alpha} = 1 \in (0, \infty).$$
(Limitu $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos x}$ lze upočítat z L'Hospitala.)
Tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)^{-\alpha}$. Tento integrál lze přímo spočítat a dostaneme, že konverguje právě tehdy, když $\alpha < 1$.

Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha \in (-1, 1)$.

(c) ❀ $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0, \pi)$. Navíc $f \le 0$, budeme tedy vyšetřovat $|f| = -\log(\sin x)$.

- u 0: Funkci $\sin x$ u 0 srovnáváme s x, tedy zvolme $g(x) = -\log x$. Pak

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\log(\sin x)}{-\log x} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\log x$, který ale konverguje (lze upočítat).

- u π: Funkci $\sin x$ srovnáme s $(\pi - x)$, Tedy $g(x) = -\log(\pi - x)$.

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{-\log(\sin x)}{-\log(\pi - x)} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{(\pi - x)}} = 1 \in (0,\infty).$$

  (Limitu $\lim_{x\to\pi} \frac{(\pi-x)}{\sin x}$ lze upočítat z L'Hospitala.)
  Tedy $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\log(\pi - x)$. Tento integrál lze přímo spočítat a zjistíme, že konverguje.

Závěr: $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(d) $\ast \displaystyle\int_1^{\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[1,\infty)$.
- $\alpha = 0$, pak $f(x) = \sin 1$ a integrál diverguje.
- $\alpha < 0$: x^α jde u ∞ do 0, budeme tedy srovnávat $\sin x^\alpha$ s $g(x) = x^\alpha$ (míříme k známé limitě $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\sin x^\alpha|}{x^\alpha} = 1 \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

- $\alpha > 0$: Nejprve substituujeme $y = x^\alpha$, pak $\mathrm{d}y = \alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$, meze budou $(1,\infty)$. Tedy

$$\int_1^{\infty} \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} \sin(x^\alpha)\alpha x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin y\,\mathrm{d}y$$

  Převedli jsme na známý integrál, který absolutně konverguje právě tehdy, když $\frac{1}{\alpha} - 1 < -1$, tedy pro $\alpha < 0$. Jelikož jsme ale předpokládali, že $\alpha > 0$, tak původní integrál absolutně nekonverguje pro žádné $\alpha > 0$.

Závěr: $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $[0,\infty)$.
- u ∞ budeme srovnávat s e^{-x}. Pro $x \geq 1$ máme

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &\leq e^{-x} \\ -x^2 &\leq -x \\ x &\leq x^2 \end{aligned}$$

Protože $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ konverguje (lze přímo upočítat), tak ze srovnávacího kritéria konverguje i $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$

Závěr: $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(f) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Lze přímo spočítat (per partes)

$$\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = [x\log x]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x\log x]_0^1 - [x]_0^1 = -1.$$

Závěr: integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(g) ❄ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,1]$.
- $p=0$, pak $f(x)=\frac{\sin 1}{x^q}$ a tedy integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $q<1$.
- $p>0$: x^p jde u 0 do 0, budeme tedy srovnávat $\sin x^p$ s x^p. Celkem máme $g(x)=\frac{x^p}{x^q}$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{|\sin x^p|}{x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = 1 \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{p-q}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $p-q>-1$.
- $p<0$: Analogicky příkladu (1d): substituujeme $y=x^p$ (tedy $y^{1/p}=x$), pak $\mathrm{d}y = px^{p-1}\,\mathrm{d}x$, meze budou $(1,\infty)$. Tedy

$$\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,\mathrm{d}x = -\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{q}{p}}}\cdot\frac{1}{p}\cdot y^{\frac{1}{p}-1}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{p}\int_1^\infty \sin y\cdot y^{\frac{1}{p}-1-\frac{q}{p}}\,\mathrm{d}y$$

  Převedli jsme na známý integrál, který absolutně konverguje právě tehdy, když $1+\frac{q}{p}-\frac{1}{p}>1$, tedy pro $\frac{q-1}{p}>0$. Protože $p<0$, máme $q-1<0$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když

$$(p=0\ \&\ q<1)\vee(p>0\ \&\ p-q>-1)\vee(p<0\ \&\ q<1)$$

lze psát i

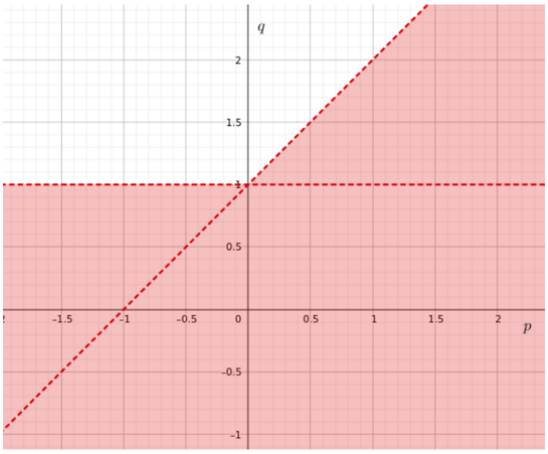
$$(q<1\ \&\ p\in\mathbb{R})\vee(q\geq 1\ \&\ p>q-1)$$

Vztahy p a q jsou znázorněny na obrázku

(h) i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,1)$.
- u 0:



A. $k \geq 0$: Pak $x^k \leq 1$, tedy „1 vede nad x^k“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{1}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{|\log x|^\alpha} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^k} = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ \frac{1}{2}, & k = 0, \end{cases} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 |\log x|^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha \in \mathbb{R}$.

B. $k < 0$: Pak $1 \leq x^k$, tedy „x^k vede nad 1“. Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{x^k}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^k}{1+x^k} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^{-k}} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha \in \mathbb{R}$.

- u 1: $|\log x|$ budeme srovnávat s $|1-x|$, dohromady tedy $g(x) = |1-x|^\alpha$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{|1-x|^\alpha} = \frac{1}{2} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 |1-x|^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$ (lze přímo upočítat nebo substituovat $y = 1 - x$ a převést na známý integrál).

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

ii. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\ln x|^\alpha}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1, \infty)$.
- u 1 postupujeme analogicky jako v předchozím příkladě. Zjistíme, že $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $\alpha > -1$.

- u ∞:
  A. $k \geq 0$: Pak $x^k \geq 1$, tedy „x^k vede nad 1". Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}$.
  $$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{x^k}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^k}{1+x^k} = \begin{cases} 1, & k>0, \\ \frac{1}{2}, & k=0, \end{cases} \in (0,\infty).$$
  Tedy $\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{x^k}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje právě tehdy, když $(k>1, \alpha\in\mathbb{R})$ nebo $(k=1, \alpha < -1)$.
  B. $k < 0$: Pak $1 \geq x^k$, tedy „1 vede nad x^k". Budeme tedy srovnávat s $g(x) = \frac{|\log x|^\alpha}{1}$.
  $$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}}{\frac{|\log x|^\alpha}{1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^k} = 1 \in (0,\infty).$$
  Tedy $\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty |\log x|^\alpha\,\mathrm{d}x$, který ale diverguje pro všechna $\alpha\in\mathbb{R}$.

  Závěr: $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konverguje právě tehdy, když $k>1\,\&\,\alpha>-1$.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,1]$.
- Protože $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$, tak lze funkci spojitě rozšířit do 0. Tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje.

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1,2]$.
- u 1: máme $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$. Funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
  $$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1+} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \in (0,\infty)$$
  Tedy $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$, který ale konverguje (lze přímo spočítat).

Závěr: $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(k) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(0,\infty)$.

- u 0: funkci $\arctan x$ srovnáváme s x. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = x^\alpha x^\beta$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha x^\beta} = 1 \in (0, \infty)$$

  Tedy $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta}$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$.
- u ∞: funkci $\arctan x$ srovnáváme s $\frac{\pi}{2}$. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = x^\alpha (\frac{\pi}{2})^\beta$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \arctan^\beta x}{x^\alpha (\frac{\pi}{2})^\beta} = 1 \in (0, \infty)$$

  Tedy $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha$, který ale konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$, $\alpha < -1$.

(l) $\displaystyle\int_0^\infty x^a + x^b\,\mathrm{d}x$

Řešení:
- funkce f je spojitá na $(0, \infty)$, navíc $x^a > 0$ a $x^b > 0$ na $(0, \infty)$.
- u 0: $\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a > -1$. Analogicky $\int_0^1 x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $b > -1$.
  Dohromady tedy $\int_0^1 x^a + x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a > -1$, $b > -1$. (Lze i přímo upočítat.)
- u ∞: $\int_1^\infty x^a\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a < -1$. Analogicky $\int_1^\infty x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $b < -1$.
  Dohromady tedy $\int_1^\infty x^a + x^b\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $a < -1$, $b < -1$. (Lze i přímo upočítat.)

Závěr: $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

(m) $\displaystyle\int_0^1 x^{\log x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:
- Funkci přepíšeme $f(x) = x^{\log x} = e^{\log x \log x} = e^{\log^2 x}$. Tedy funkce f je spojitá na $(0, 1]$.
- u 0: Na intervalu $(0, \frac{1}{e})$ platí $\log x < -1$. Tedy

$$x^{\log x} > x^{-1}$$

  Protože $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje, tak ze srovnávacího kritéria diverguje i integrál $\int_0^{\frac{1}{e}} x^{\log x}\,\mathrm{d}x$.

Závěr: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje.

(n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $(1,2]$.
- u 1: funkci $\arctan(x-1)$ srovnáváme s $(x-1)$ (chová se jako arctan u 0). Funkci $(x-\sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ budeme srovnávat s $(\sqrt{x}-1)$. Dohromady tedy funkci f budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^p} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$.

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1+}\frac{\frac{\arctan(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(\sqrt{x}-1)^p}} = \lim_{x\to1+}\frac{(\sqrt{x}-1)^p}{(x-\sqrt{x})^p} = \lim_{x\to1+}\frac{(\sqrt{x}-1)^p}{(\sqrt{x})^p(\sqrt{x}-1)^p}$$
$$= 1 \in (0,\infty)$$

Tedy $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$.
- Konvergence integrálu $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^{p-1}}$: Substituce $y=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y+1}{(y-1)^{p-1}} 2y\,\mathrm{d}y$$

Integrál srovnáme s $h(y) = \frac{1}{(y-1)^p}$. Pak

$$\lim_{y\to1+}\frac{\frac{y+1}{(y-1)^{p-1}}2y}{\frac{1}{(y-1)^p}} = 4 \in (0,\infty)$$

Tedy $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{y+1}{(y-1)^{p-1}}2y\,\mathrm{d}y$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{(y-1)^{p-1}}\,\mathrm{d}y$, což je právě tehdy, když $1-p>-1$, tedy $p<2$.

Závěr: $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $p<2$.

(o) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- $p=0$, pak $f\equiv 0$ a integrál konverguje.
- $p>0$, pak u 0 LSK s $g(x) = \frac{px}{x^n}$.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{px}{x^n}} = 1,$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 px^{1-n}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $1-n>-1 \Leftrightarrow 2>n$.
U ∞ LSK s $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}} = 1.$$

Tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_1^\infty x^{-n}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $n<1$.
- $p<0$: funkce $\arctan x$ je lichá, tedy $\arctan px = -\arctan|p|x$ pro $x\in(0,\infty)$ a tedy konvergence vyjde stejně jako pro $p>0$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje pro $p=0$ a $n\in\mathbb{N}$. Jinak diverguje.

(p) ❀ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(-1,1)$. Funkci rozepíšeme jako
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}}$$
- u -1 srovnáváme s $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Máme
$$\lim_{x\to-1+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-1+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}=\lim_{x\to-1+}\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\in(0,\infty)$$
tedy $\int_{-1}^0 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{-1}^0\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje (lze přímo spočítat).
- u 1 srovnáváme s $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Máme
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to1-}\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\in(0,\infty)$$
tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje (lze přímo spočítat).

Závěr: $\int_{-1}^1 f(x)$ konverguje.

(q) $\displaystyle\int_0^{\frac12}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\log^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

Řešení:
- funkce f je spojitá na $(0,\frac12]$.
- u 0: máme $\arcsin(x^2+x^3)=\arcsin(x^2(1+x))$, budeme ho srovnávat s x^2. Funkci $\log(1+x)$ srovnáváme s x. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x)=\frac{x^2}{x\cdot x^2}$. Máme
$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\log^2(1+x)}}{\frac{x^2}{x\cdot x^2}}=\lim_{x\to0+}\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2(1+x)}\cdot\frac{x^2}{\log^2(1+x)}\cdot(1+x)=1\in(0,\infty),$$
tedy $\int_0^{\frac12}f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac12}\frac1x\,\mathrm{d}x$, který diverguje.

Závěr: $\int_0^{\frac12}f(x)$ diverguje.

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha,a,b,p,q\in\mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\int_0^1\frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Funkce je spojitá na $(0,1]$, u 0 limitně srovnáme s $g(x)=\frac{x}{x^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ Máme
$$\lim_{x\to0+}\frac{\frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}}{\frac{x}{\sqrt{x^3}}}=1\in(0,\infty).$$
Protože integrál $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, tak z LSK konverguje i zadaný integrál.

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

$$\frac{e^x}{x^2-1} = \frac{e^x}{(x-1)(x+1)}$$

U 1 použijeme LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{e^x}{(x-1)(x+1)}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{e}{2}$$

Protože $\int_1^2 \frac{1}{x-1} = \infty$ (lze přímo upočítat), z LSK plyne i divergence $\int_1^2 f(x)$.

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x^{-3/4}e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
Řešení: Provedeme substituci $y = \sqrt{x},\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_1^\infty x^{-3/4}e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^\infty y^{-1/2}e^{-y}\,\mathrm{d}y$$

Na intervalu $(0,\infty)$ je funkce spojitá a nezáporná. Roztrhneme na integrály $\int_0^1 + \int_1^\infty$.
U 0: srovnáme s funkcí $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

$$\lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{e^y\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = \lim_{y\to 0+} \frac{1}{e^y} = 1 \in (0,\infty)$$

Protože $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$ konverguje (lze spočítat), konverguje z LSK i $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}e^y}$.
U ∞: Použijeme SK, pro $y \geq 1$ máme

$$\frac{1}{\sqrt{y}e^y} \leq \frac{1}{e^y}.$$

Protože $\int_1^\infty e^{-y}\,\mathrm{d}y$ konverguje, tak ze SK konverguje i $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{y}e^y}$.
Závěr: původní integrál Konverguje.

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x$
Řešení: Máme

$$\int_0^1 x^{-\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce je spojitá na $(0,1]$ a platí

$$\lim_{x\to 0+} e^{-\ln^2 x} = 0.$$

Funkci lze tedy spojitě rozšířit na (omezený) interval $[0,1]$ a tedy integrál konverguje.

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$
Řešení:

- $p = 0$, pak $f \equiv 0$ a integrál konverguje.
- $p > 0$, pak u 0 LSK s $g(x) = \frac{px}{x^n}$.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{px}{x^n}} = 1,$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_0^1 px^{1-n}$ konverguje $\Leftrightarrow 1 - n > -1 \Leftrightarrow 2 > n$.
U ∞ LSK s $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\arctan px}{x^n}}{\frac{\frac{\pi}{2}}{x^n}} = 1.$$

Tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-n}$ konverguje $\Leftrightarrow n > 1$.
Tedy pro $p > 0$ integrál diverguje pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- $p < 0$: Protože $\arctan x$ je lichá funkce, tak platí $\arctan px = -\arctan |p|x$, čímž jsme převedli příklad na předchozí případ.

Dohromady $\int_0^\infty f(x)$ konverguje pro $p = 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Jinak diverguje.

(f) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Funkce je spojitá na $(0, \pi)$. Problematické body: 0 a π.
U 0: srovnáme s $g(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x^3}}$.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\left|\frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}\right|}{\frac{|\ln x|}{\sqrt{x^3}}} = 1.$$

Protože $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln x| x^{-3/2} = \infty$ (z tabulky nebo odvodíme), tak u 0 diverguje i náš původní integrál. U π tedy už nemusíme vyšetřovat.
Závěr: diverguje.

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Funkce spojitá na $(0, \infty)$. U 0 srovnáme s $g(x) = \frac{x^3}{x^p}$ (uhodneme z Taylorova rozvoje funkce $x - \sin x$).

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x - \sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}} = \frac{1}{6} \in (0, \infty).$$

Tedy $\int_0^1 \frac{x - \sin x}{x^p}$ z LSK konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 x^{3-p}$. Tedy právě tehdy, když $3 - p > -1 \Leftrightarrow p < 4$.
U ∞: srovnáme s funkcí $g(x) = \frac{x}{x^p}$.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x - \sin x}{x^p}}{\frac{x}{x^p}} = \lim_{x \to 0+} 1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - 0$$

Z LSK tedy konverguje právě tehdy, když $\int_1^\infty x^{1-p}$ konverguje, což je $\Leftrightarrow 1 - p < -1$ $\Leftrightarrow 2 < p$.
Závěr: Integrál konverguje $\Leftrightarrow 2 < p < 4$.

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \,\mathrm{d}x$

Řešení: U 0 srovnáme s $g(x) = x^p$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^p x \cos^q x}{x^p} = 1,$$

tedy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p > -1$.
U $\frac{\pi}{2}$ LSK s $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)^q$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^p x \cos^q x}{(\frac{\pi}{2} - x)^q} = 1,$$

tedy $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)^q$ konverguje. Lze upočítat nebo substituovat a vyjde, že integrál konverguje $\Leftrightarrow$ $q > -1$.
Závěr: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow$ $(p > -1 \wedge q > -1)$.

(i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: U ∞: LSK s $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Protože $\int_1^{\infty} x^{-2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^{\infty} f(x)$.

(j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Funkce je spojitá na $(0, \infty)$.
U 0: srovnáme s $g(x) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x}}{\frac{x \sin \frac{1}{x}}{x}} = 1 \in (0, \infty).$$

Navíc $\int_0^1 \sin \frac{1}{x}$ konverguje, protože $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ a integrál omezené a spojité funkce (na $[0, 1]$) konverguje.
U ∞: $\frac{1}{x} \to 0+$, tedy $\sin \frac{1}{x}$ „se chová jako“ sin u 0. Budeme tedy srovnávat s funkcí $g(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x} = \frac{\pi}{2x^2}$. LSK:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x}}{\frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}}{x}} = 1.$$

Protože $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} \,\mathrm{d}x$.
Závěr: původní integrál konverguje.

(k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Ze SK:

$$\left| \frac{\sin \frac{1}{\cos x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Protože $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, konverguje i náš integrál.

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$

Řešení: U 0: LSK s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\log 2} \in (0,\infty).$$

Protože $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje, tak z LSK konverguje i $\int_0^1 f(x)$.
U ∞: funkce $1+e^x$ „se chová jako“ e^x, tedy LSK s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\log(e^x)} = x^{-3/2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log(1+e^x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log e^x(e^{-x}+1)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\log(e^{-x}+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\log(e^{-x}+1)}{x}} = 1\end{aligned}$$

Navíc integrál $\int_1^\infty x^{-3/2}$ konverguje, tedy z LSK konverguje i $\int_1^\infty f(x)$.
Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje.

(m) $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\right)\mathrm{d}x$

Řešení: U ∞: upravíme odmocniny:

$$\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}$$

Pro $\alpha > 0$ srovnáme s $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{1}{2}$$

Tedy z LSK $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.
Pro $\alpha \le 0$ srovnáme s $g(x) = 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\right)}{1} = \begin{cases} \sin 1, & \alpha < 0, \\ \sin 3, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Z LSK tedy $\int_1^\infty f(x)$ pro $\alpha \le 0$ diverguje.
U 0 stačí uvažovat $\alpha > 1$. Ale pro takové α je $f(x)$ spojitá na $[0,1]$, tedy integrál konverguje.
Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?
Řešení: Jde vlastně o LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ na intervalu $[a,\infty)$. Tedy
   (a) $A \in (0,\infty)$: $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow \int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha > 1$. (Speciálně tedy diverguje pro $\alpha \le 1$.)

(b) $A = 0$: Jestliže $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha > 1$, tak konverguje i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha \le 1$ nelze nic říci.

(c) $A = \infty$: Jestliže $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje, což je právě tehdy, když $\alpha \le 1$, tak diverguje i $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha > 1$ nelze nic říci.

4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot(x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?
Řešení: Jde vlastně o LSK s funkcí $g(x) = \frac{1}{(x-b)^\alpha}$ na intervalu $[a,b)$. Tedy

   (a) $A\in(0,\infty)$: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha < 1$. (Speciálně tedy diverguje pro $\alpha \ge 1$.)

   (b) $A = 0$: Jestliže $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, což je právě tehdy, když $\alpha < 1$, tak konverguje i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha \ge 1$ nelze nic říci.

   (c) $A = \infty$: Jestliže $\int_a^b \frac{1}{(x-b)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje, což je právě tehdy, když $\alpha \ge 1$, tak diverguje i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pro $\alpha < 1$ nelze nic říci.

5. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html

   (a) $$\int_1^\infty \frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}\,\mathrm{d}x$$
   Řešení:
   - funkce f je spojitá na $(1,\infty)$.
   - u 1: funkci $\log x$ srovnáme s $(x-1)$. Funkci $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ srovnáváme s $(x-1)$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (x-1)(x-1)^\alpha$. Máme
   $$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to1+}\frac{\frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}}{(x-1)(x-1)^\alpha}\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)}{x^3}\cdot\frac{\log^\alpha x}{(x-1)^\alpha} = 2\in(0,\infty),$$
   tedy $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 (x-1)^{1+\alpha}\,\mathrm{d}x$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha+1 > -1$, tedy když $\alpha > -2$. (Lze přímo spočítat.)
   - u ∞: funkci x^2-1 srovnáváme s x^2. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x^2\log^\alpha x}{x^3}$.
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}}{\frac{x^2\log^\alpha x}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2} = 1\in(0,\infty).$$
   Tedy $\int_2^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty \frac{\log^\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ (lze spočítat substitucí $y = \log x$).

   Závěr: $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha\in(-2,-1)$.

   (b) $$\int_0^1 \frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}\,\mathrm{d}x$$
   Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0,1)$.
- u 0: funkci $\arcsin(x)$, budeme ho srovnávat s x. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = (e-1)^\alpha \frac{\pi}{2} \in (0,\infty),$$

  tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje.
- u 1: funkci $(e^{1-x}-1)$ srovnáváme s $1-x$. Funkci $\arccos x$ srovnáváme s $\sqrt{1-x}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (1-x)^\alpha\sqrt{1-x}$. Máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}{(1-x)^\alpha\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \in (0,\infty)$$

  tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^\alpha\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$. Tedy právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\frac{1}{2}+\alpha}$, což je právě pro $\alpha + \frac{1}{2} > -1$, tedy pro $\alpha > -\frac{3}{2}$.

Závěr: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -\frac{3}{2}$.

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} (\operatorname{arccot} x)^\alpha \,\mathrm{d}x$ **Řešení:**

- funkce f je spojitá na $(1,\infty)$.
- u 1: $\log x$, budeme ho srovnávat s $(x-1)$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$. Máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{arccot} x)^\alpha}{\frac{x-1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{(x-1)}(\operatorname{arccot} x)^\alpha \\ &= (\operatorname{arccot} 1)^\alpha \in (0,\infty),\end{aligned}$$

  tedy $\int_1^2 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje (lze přímo spočítat).
- u ∞: funkci $\operatorname{arccot} x$ budeme srovnávat s $\frac{1}{x}$. Funkci $\frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}$ srovnáme s $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}} x^\alpha}$. Máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{arccot} x)^\alpha}{\frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}} x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x \operatorname{arccot} x)^\alpha = 1 \in (0,\infty).$$

  Tedy $\int_2^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_2^\infty (\log x) x^{-\frac{3}{2}-\alpha}\,\mathrm{d}x$, který konverguje právě tehdy, když $-\frac{3}{2} - \alpha < -1$, tedy právě pro $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > -\frac{1}{2}$.

(d) Ukažte, že funkce $x - \sin x$ je kladná na $(0,\infty)$ a vyšetřete konvergenci
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x-\sin x))}{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Uvažujme funkci $h(x) = x - \sin x$. Pak $h(0) = 0$ a $h'(x) = 1 - \cos x$ na $x \in (0,\infty)$. Pak $h' \geq 0$ na $(0,\infty)$. Speciálně je $h' > 0$ na $(0,2\pi)$. Tedy h je rostoucí na $[0,2\pi]$. Navíc h neklesá na $[2\pi,\infty)$. Tedy $h > 0$ na $(0,\infty)$.
- funkce f je spojitá na $(0,\infty)$.
- funkci $h = x - \sin x$ lze rozvinout jako $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- u 0: budeme srovnávat $\log(x - \sin x)$ s $\log x^3 = 3\log x$. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{3\log^2 x}{1}$. Máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{(\log x)(\log(x-\sin x))}{x^{\frac{6}{5}}+10+\sin x}}{3\log^2 x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\log(x-\sin x)}{3\log x} \cdot (x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x)$$
$$= 1 \cdot 10 = 10 \in (0,\infty),$$

tedy $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^1 3\log^2 x\,\mathrm{d}x$, který konverguje (nutno ukázat).
Limitu jsme spočetli jako

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(x-\sin x)}{3\log x} \underset{\text{něco}/\infty}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1-\cos x}{x-\sin x}}{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^3}{x-\sin x} = 1$$

- u ∞: budeme srovnávat $\log(x-\sin x)$ s $\log x$. Funkci $x^{\frac{6}{5}}+10+\sin x$ srovnáváme s $x^{\frac{6}{5}}$ Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = \frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}}$. Máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(\log x)(\log(x-\sin x))}{x^{\frac{6}{5}}+10+\sin x}}{\frac{\log^2 x}{x^{\frac{6}{5}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x-\sin x)}{\log x} \cdot \frac{x^{\frac{6}{5}} + 10 + \sin x}{x^{\frac{6}{5}}} = 1 \in (0,\infty)$$

tedy $\int_1^\infty f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^\infty \frac{\log^2 x}{x^{\sqrt{65}}}\,\mathrm{d}x$, který konverguje (nutno ukázat).
Limitu jsme spočetli jako

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x-\sin x)}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x(1-\frac{\sin x}{x})}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x + \log(1-\frac{\sin x}{x})}{\log x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\log(1-\frac{\sin x}{x})}{\log x} \overset{VOAL}{=} 1 + \frac{0}{\infty} = 1 \in (0,\infty)$$

Závěr: $\int_0^\infty f(x)$ konverguje.

(e) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x)\cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

Řešení:

- funkce f je spojitá na $(0,1)$.
- funkci $\arcsin x - \sin x$ lze rozvinout jako $\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

- u 0: budeme srovnávat $\arcsin x - \sin x$ s x^3. Funkci $\sin(\pi x)$ srovnáváme s πx. Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (x^3)^\alpha (\pi x)^\beta$. Máme

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(x^3)^\alpha (\pi x)^\beta} = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha \cdot 1 \cdot 1 \in (0, \infty),$$

tedy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_0^{\frac{1}{2}} \pi^\beta x^{3\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x$, který konverguje právě tehdy, když $3\alpha + \beta > -1$.

- u 1: Funkci $\sin(\pi x)$ srovnáváme s $1-x$. Plyne z grafu nebo z Taylorova rozvoje funkce $\sin(\pi x)$ v bodě 1. Funkci $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ srovnáváme s $1 - x$. (Opět z grafu nebo z Taylora v 1.)
Dohromady tedy srovnáváme s $g(x) = (1-x)^\beta (1-x)^\alpha$. Máme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{(\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x) \cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1-x)^\beta (1-x)^\alpha} = (\frac{\pi}{2} - 1)^\alpha \pi^\beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \in (0, \infty)$$

tedy $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x$, který konverguje právě tehdy, když $\alpha + \beta > -1$ (lze převést substitucí $y = 1 - x$ na známý integrál).
Limity jsme spočetli jako

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sin(\pi x)}{(1-x)} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{\pi \cos(\pi x)}{-1} = \pi$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{(1-x)} \underset{0/0}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{-1} = \frac{\pi}{2}$$

Závěr: $\int_0^1 f(x)$ konverguje právě tehdy, když $(\alpha + \beta > -1 \,\&\, 3\alpha + \beta > -1)$.
.