21. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty \leq a < b < \infty$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $(a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b f$ diverguje, pak také $\int_a^b g$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ diverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b f$ konverguje, pak také $\int_a^b g$ konverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$. Nechť dále je f **spojitá** na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$

   (b) ♡ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx$

   (c) ✾ $\displaystyle\int_0^\pi \log(\sin x)\,dx$

   (d) ✱ $\displaystyle\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

   (g) ❆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^p}{x^q}\,dx$

   (h) i. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\log x|^\alpha}{1 + x^k}\,dx$

   ii. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{1 + x^k}\,dx$

   (i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$

   (j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

   (k) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x\,dx$

   (l) $\displaystyle\int_0^\infty x^a + x^b\,dx$

   (m) $\displaystyle\int_0^1 x^{\log x}\,dx$

   (n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x - 1)}{(x - \sqrt{x})^p}\,dx$

   (o) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,dx$

   (p) ❀ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

   (q) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2 + x^3)}{x \log^2(1 + x)}\,dx$

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\sqrt{x^3}}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2 - 1}\,dx$

   (c) ✿ $\displaystyle\int_0^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}}\,dx$

   (d) ❄ $\displaystyle\int_0^1 x^{-\ln x}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

(f)❀ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

(g)✿ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$

(m)★ $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1}-x^\alpha\right)\,\mathrm{d}x$

3. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,\infty)$, $a>0$. Nechť existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot x^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^\infty f$ v závislosti na A a α?
4. Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $[a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$. Nechť existuje $\lim_{x\to b-} f(x)\cdot(x-b)^\alpha = A$. Co můžeme říct o konvergenci $\int_a^b f$ v závislosti na A a α?

Zkouškové příklady

5. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{arccot} x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

(d) Ukažte, že funkce $x-\sin x$ je kladná na $(0,\infty)$ a vyšetřete konvergenci
$\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x-\sin x))}{x^{\frac{6}{5}}+10+\sin x}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x)\cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(1b) u $\frac{\pi}{2}$: $\tan x = \sin x/\cos x$, pak užijte srovnávací tabulku pro $\cos x$.
(1c) u π srovnejte $\sin x$ s $\pi - x$.
(1d) Pro $\alpha>0$ substituujte $y=x^\alpha$.
(1g) Pro $p<0$ převeďte na $\int \frac{\sin y}{y^r}$.
(1p) $1-x^4=(1+x^2)(1-x)(1+x)$.

(2c) substituce $y=\sqrt{x}$
(2d) $a^b = e^{b\ln a}$
(2f) začněte s bodem 0
(2g) Taylorův rozvoj
(2m) upravme odmocniny