20. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Algoritmus

1. Možná je vhodné daný interval **roztrhnout** a vyšetřovat každý konec zvlášť.
2. Je funkce **spojitá na omezeném uzavřeném** intervalu? Lze ji **spojitě dodefinovat**?
3. Je možné integrál přímo **upočítat**? Je možné jej (např. substitucí) převést na tabulkový integrál?
4. **SK** a **LSK**. (Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.)

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^a\,\mathrm{d}x$

   (c)♡ $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^\alpha}$

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (f)❄ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

   (i) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

   (j)❀ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

   (k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

   (l) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

   (m)✿ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   (n)✻ $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

   (o) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$

   (p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$

   (q) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

2. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.
3. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0, 1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0, 1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

(1c) substituce $y = 3 - x$
(1f) $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$
(1j) uvažujte kombinace záporných i kladných p i q. Pro představu položte např. $p = \pm 3$ a $q = \pm 2$
(1m) substituce $y = \sqrt{x}$
(1n) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$