# 19. cvičení – Teorie integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Integrály uvažujeme Newtonovy.

**Definice 1.** Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá* na intervalu $I$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I,\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. Dokažte: Nechť $I$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$. Pak $f$ není stejnoměrně spojitá na $I$ právě tehdy, když existuje $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ bodů z $I$ splňující $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   **Řešení:** "$\Rightarrow$" Předpokládejme, že $f$ není stejnoměrně spojitá na intervalu $I$. Neboli

   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in I,\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

   Najděme tedy takové $\varepsilon > 0$ a zvolme $n \in \mathbb{N}$. Položme $\delta_n = \frac{1}{n}$. Protože $f$ není stejnoměrně spojitá, tak existuje $x = x_n$ a $y = y_n$ takové, že $|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   Zbývá ukázat, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$. Zvolme $\eta > 0$. Najděme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n_0} < \eta$. Pak pro každé $n \geq n_0$ platí

   $$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \eta.$$

   "$\Leftarrow$"
   Mějme takové $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
   Z definice limity pro každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \geq n_0$ je $|x_n - y_n| < \delta$.
   Zvolme tedy $\delta > 0$ a položme $x = x_n$ a $y = y_n$. Pak máme $|x - y| < \delta$ a zároveň $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
   QED.
2. Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?
3. Nechť $F = \int \frac{1}{x^2}$ a $F(1) = 1$. Je pravda, že $F(-1) = 3$?
   **Řešení:** Nepravda - problém s s definičním oborem. Funkce $F = -\frac{1}{x} + c_1$ na $(0, \infty)$ a $F = -\frac{1}{x} + c_2$ na $(-\infty, 0)$. Tedy i když z podmínky máme $c_1 = 2$, pořád nevíme nic o $c_2$.
4. Které/á z následující jsou tvrzení pravdivá?
   (a) Jestliže $f'(x) = g'(x)$ (pro všechna $x$), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna $x$).
   (b) Jestliže $\int f(x) = \int g(x)$ (pro všechna $x$), pak $f(x) = g(x)$ (pro všechna $x$).

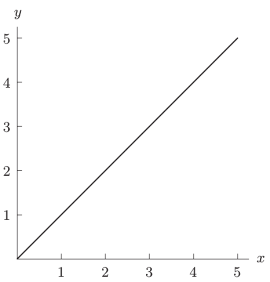
   Zdroj: http://www.math.cornell.edu/~GoodQuestions/GQbysection_pdfversion.pdf
   A neplatí, protože i když se rovnají derivace, tak funkce $g$ a $f$ se mohou lišit o konstantu.
   B platí. Označme $F(x) = \int f(x)$ a $G(x) = \int g(x)$. Víme, že $F = G$. Pak ale i $F' = G'$, což je vlastně $f = g$.
5. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na intervalu $(a, b)$.

   NE Jestliže $(a, b)$ je omezený a $F$ je omezená, pak i $f$ je omezená.
   Protipříklad: $F = \sqrt{x}$, $f = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.

NE Jestliže $f$ je omezená a spojitá, pak i $F$ je omezená.
Protipříklad: $f = \frac{1}{x}$, $F = \ln x$ na $(1, \infty)$.

6. PRAVDA Nechť funkce $f$ má na $\mathbb{R}$ primitivní funkci, $g$ je polynom. Pak k funkci $fg$ existuje primitivní funkce na $\mathbb{R}$.
**Řešení:** Uvažujme polynom $g$ stupně $n$.
   - $n = 0$, tedy $g = a$, kde $a$ je konstanta. Pak z linearity
$$\int af = aF.$$
   - $n = 1$, tedy $g = ax + b$. Pak z per partes (polynom $g$ i $g'$ je spojitá funkce) máme
$$\int fg = Fg - \int Fg' = Fg - \int Fa.$$
Integrál na pravé straně existuje, protože $Fa$ je spojitá funkce. ($F$ jako primitivní funkce musí být spojitá.)
   - Obecné $n$:
$$\int fg = Fg - \int Fg'$$
Integrál na pravé straně existuje, protože $Fg'$ je spojitá funkce.

7. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



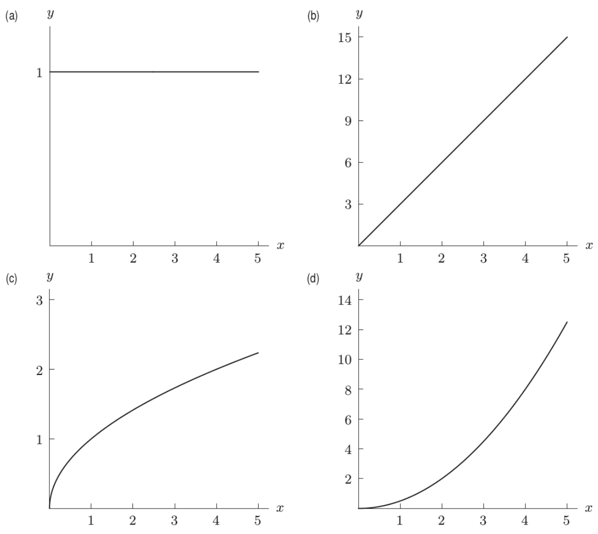
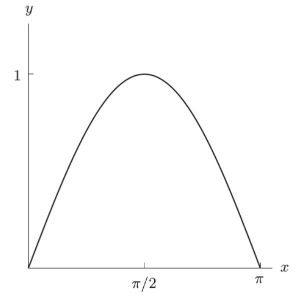




Figure 1: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

D, funkce na obrázku vpravo je $f(x) = x$. Její integrál je $x^2/2$, takže D.

8. Který z následujících grafů může reprezentovat primitivní funkci k funkci na obrázku vpravo?



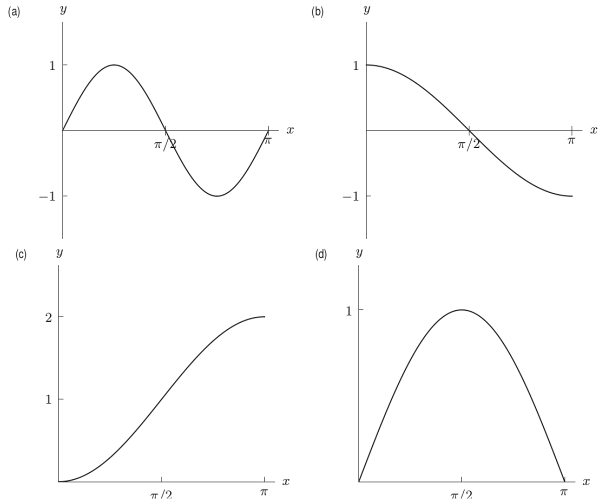
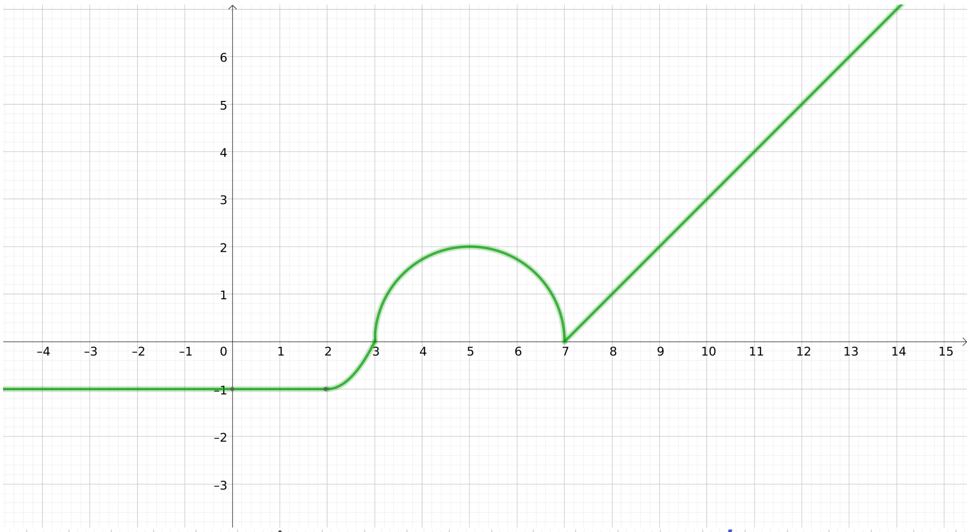
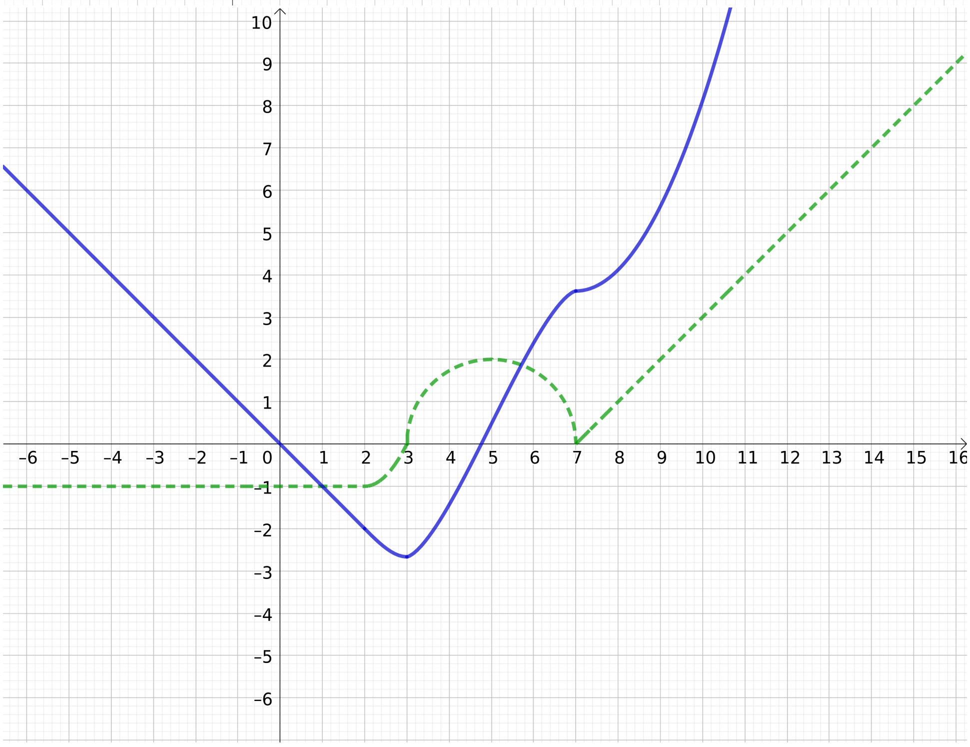




Figure 2: https://www.wiley.com/college/hugheshallett/0470089148/conceptests/concept.pdf

C, funkce vpravo (tedy derivace) je kladná, primitivní funkce tedy musí být rostoucí.

9. Na obrázku je funkce $f$. Načrtněte její primitivní funkci $F$, jestliže víte, že $F(0) = 0$. (Stačí náčrtek, není nutno hledat primitivní funkci ze vzorečků, jde spíš o grafickou podobu.)





10. Použijte riemannovské sumy k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže hodnoty funkce $f$ jsou
Návod: načrtněte funkci, která má hodnoty z tabulky. Pak ji zkuste obalit obdélníky seshora a vyplnit obdélníky zespod. Spočtěte jejich obsahy.

| $x$ | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 50 | 48 | 44 | 36 | 24 | 8 |

Horní odhad: 606
Dolní odhad: 480

11. Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

(a) $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje
(b) $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje
(c) $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje
(d) $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje
(e) $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

**Řešení:** A - konverguje, linearita integrálu
B - diverguje
C - může konvergovat i divergovat
D - může konvergovat i divergovat
E - může konvergovat i divergovat

12. PRAVDA – NEPRAVDA Nechť $(-a, a) \subseteq \mathbb{R}$.

ANO – NE Nechť $f$ je lichá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 0$
ANO – NE Nechť $f$ je sudá funkce. Pak $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$

**Řešení:** Pravda za předpokladu, že integrály existují vlastní. Jinak integrály nemusí existovat.

13. PRAVDA – NEPRAVDA

NE Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.
NE Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

**Řešení:** Obecně neplatí. Protipříklad: $f$ je upravená Dirichletovu funkce s hodnotami $-1$ a 1. Pak $|f| = 1$ a $\int_0^1 |f| = 1$, kdežto $f$ nemá vůbec primitivní funkci.
Aby platilo, nutno přidat podmínky (např. $f$ spojitá a $\int_a^b f$ existuje - věta z přednášky).
Druhé tvrzení také obecně neplatí, např. $f = \sin x/x$ na $(1, \infty)$.

14. Nechť $f$ je spojitá funkce definovaná na omezeném intervalu $(a, b)$. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?
*(Negací k $\int_a^b f$ konverguje je výrok $\int_a^b f = \pm\infty$ nebo $\int_a^b f$ neexistuje.)*

(a) $\int_a^b f$ konverguje.
(b) $\int_a^b f^2$ konverguje.
(c) $\int_a^b |f|$ konverguje.
(d) $f$ je definovaná a spojitá dokonce na $[a, b]$.

**Řešení:**

- (a) $\not\Rightarrow$ (b): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.

- (a) $\not\to$ (c): Protipříklad $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Substitucí se převede na $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$, o němž víme, že konverguje, ale ne absolutně.

——

- (c) $\to$ (a): Absolutní konvergence implikuje konvergenci (věta).
- (b) $\to$ (c): Platí, že $|f| \leq \max\{1, f^2\}$. Ale $\int_a^b 1 < \infty$ a $\int_a^b f^2 < \infty$ také (předpoklad). Odtud (a ze srovnávacího kritéria) už $\int_a^b |f|$ konverguje.

——

Z předchozího pak plyne:

- (b) $\to$ (a)

——

- (d) $\to$ (a): Spojitá funkce na omezeném a uzavřeném intervalu je omezená. Integrál konverguje.
- (d) $\to$ (c): Je-li $f$ spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i $|f|$. A tedy integrál konverguje.
- (d) $\to$ (b): Je-li $f$ spojitá na $[a, b]$, je tam spojitá i $f^2$. A tedy integrál konverguje.

——

- (a) $\not\to$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (c) $\not\to$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$.
- (b) $\not\to$ (d): Protipříklad $f = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ na $(0, 1)$.

15. PRAVDA – NEPRAVDA
    Nechť $f$ je funkce spojitá na $[1, \infty)$.
    NE Jestliže $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.
    NE Jestliže $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

    **Řešení:** Protipříklad $\int_1^\infty \frac{1}{x}$.
    Protipříklad: Uvažujme funkci $f$, která má v každém $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zakreslený rovnoramenný trojúhelník o výšce $n$ a základně $2/n^3$.
    Pak její integrál je roven $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, ale limita určitě není 0.

16. Najděte horní a dolní riemannovské součty pro Dirichletova funkci

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

    **Řešení:** $\underline{\int_a^b} D(x) = 0$, $\overline{\int_a^b} D(x) = 1$

17. Sestrojte funkce $f_n(x) : [0, 1] \to [0, \infty)$ tak, že
    (a) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
    (b) pro každé $x \in [0, 1]$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

    Tedy pro tuto posloupnost funkcí platí

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

    P.S.: Stačí obrázkem.
    např. $f_n(x) = 2n\chi_{[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}$