16. cvičení – Určitý integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Řekneme, že funkce f má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, jestliže má na (a,b) primitivní funkci F a $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Definice 2. Nechť $a,b \in R^*$, $a<b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a,b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a,b) existuje*, jestliže

- f má na (a,b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (ne nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonotva integrálu z funkce f na intervalu (a,b) nazýváme prvek množiny $\mathbb{R}^*$ určený výrazem

$$\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Věta 3. Nechť (a,b) je **omezený** interval a nechť f je **omezená spojitá** funkce na (a,b). Pak $f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Věta 4 (Vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** Nechť $[a,b]$ je **omezený** interval a nechť f je **spojitá** funkce na $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$ a

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 5 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a,b]$. Pak

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Věta 6 (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ splňuje $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$ a φ má vlastní **nenulovou** derivaci na (α,β). Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Poznámka 7. Lze psát i takto:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,\mathrm{d}y. = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_{-5}^{0} \frac{2}{3-4x} \,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \,\mathrm{d}x$

   (i) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^x \,\mathrm{d}x$

   (j) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x \,\mathrm{d}x$

2. (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} \,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

   (g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+3)^5}$

   (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

   (i) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

   (j) $\displaystyle\int_a^b \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x,\ a<0,\ b>0$

   (k) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

   (l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$

   (m) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \,\mathrm{d}x$

   (n) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x} \,\mathrm{d}x$

   (o) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-x+1}{x-1} \,\mathrm{d}x$