11.+12. cvičení – Parciální zlomky

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. (a) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

Řešení:

Budeme hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Přenásobením dostaneme vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

Dosaďme nyní postupně za $x = -1,\ -2,\ -3$. Obdržíme tak, že

$$-1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2}$$
$$-2 = -B \implies B = 2$$
$$-3 = 2C \implies C = -\frac{3}{2}$$

Odtud tedy vyplývá, že

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{-1}{2}\frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx + \int \frac{-3}{2}\frac{1}{x+3}\,dx \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$$

$x \in (-\infty,-3), (-3,-2), (-2,-1), (-1,\infty)$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$

Řešení:

Platí, že $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny. Rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

dosazením $x = 1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Zpětným dosazením a roznásobením dostaneme, že

$$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že $C = \frac{1}{3}$ (absolutní členy) a $B = -\frac{1}{3}$ (koeficienty u x^2). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x-1|$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \stackrel{C}{=}$$

$$\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, 1), (1, \infty)$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$

Řešení:

Mohli bychom provést dělení, k nalezení prvního kroku rozkladu ale vede snazší cesta

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{(x^3-5x^2+6x)+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} =$$

Nyní už máme na pravé straně podíl polynomů, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, a můžeme tedy použít standardní algoritmus. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele a poté hledáme rozklad ve tvaru

$$= 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme rovnici

$$5x^2-6x+1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

Postupným dosazením $x = 0$, $x = 2$ a $x = 3$ dostaneme, že

$$1 = 6A \implies A = \frac{1}{6}$$

$$9 = -2B \implies B = -\frac{9}{2}$$

$$45 - 18 + 1 = 3C \implies C = \frac{28}{3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx = \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}\right)dx \stackrel{C}{=} x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3|$$

$x \in (-\infty, 0), (0, 2), (2, 3), (3, \infty)$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}$

Řešení:

Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = \frac{(x^4+5x^2+4)-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = 1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = 1-\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A+Bx}{x^2+1} + \frac{C+Dx}{x^2+4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno x v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto x^2 budeme psát t.

$$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = \frac{A}{t+1} + \frac{C}{t+4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za t lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů A, B. Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t+4 = A(t+4) + C(t+1)$$

Dosazením $t=-4$ a $t=-1$ dostaneme, že[1]

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t+4}{(t+1)(t+4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{t+1} + \frac{16}{3}\frac{1}{t+4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} + \frac{16}{3}\frac{1}{x^2+4}$$

[1]) Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všechna** t reálná. Pokud by někdo namítl, že $t = x^2$ a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto námitku odpovězme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všechna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny x.

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{(x/2)^2+1}\right) dx \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} x + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1/2}\arctan\frac{x}{2} = x + \frac{1}{3}\arctan x - \frac{8}{3}\arctan\frac{x}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

Řešení:
Rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+1 = A(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme, že

$$2 = 4C \implies C = \frac{1}{2}$$

$$2 = -2A \implies A = -1$$

Nyní dosazením např. $x = 0$ dostaneme, že

$$1 = -A - B + C \implies B = -A + C - 1 = -(-1) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Odtud máme:

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right) dx \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

Řešení: Kvadratický trojčlen $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1+x)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

Dosazením $x = 0$ dostaneme, že $A = 1$. Dosazením $x = -1$ dostaneme, že $B = -1$. Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1+x)(1+x+x^2) - x(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x$$

odkud vyplývá, že $D = -1$ a $C = 0$. Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integrací dostáváme

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty,-1), (-1,0), (0,\infty)$.

(g) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)^2$

Řešení:

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosazením $x = 1$ a $x = 2$ dostaneme, že

$$1 = A, \qquad 4 = C$$

Zbylé koeficienty B, D určíme dosazením dvou libovolných hodnot, třeba $x = 0$ a $x = 3$. Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že $D = -4$ a $B = 4$. Odtud vyplývá:

$$\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}\right) \mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4\ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4\ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| =$$

$$-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$$

$x \in (-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$.

(h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

Řešení:

Platí, že $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = (x+1)((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4})$. Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

dosazením $x = -1$ dostaneme, že $A = \frac{1}{3}$. Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že $C = \frac{2}{3}$ (porovnání koeficientů absolutních členů) a $B = -\frac{1}{3}$ (porovnání koeficientů u druhé mocniny x). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, \infty)$.

2. (a) $f(x) = -\frac{3}{16}\frac{1}{(x^2+1)^2}$

Řešení: Použijeme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n.$$

Tedy $n = 1$ a

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2(1+x^2)^1} + \frac{2-1}{2}I_1.$$

Protože $I_1 \overset{C}{=} \arctan x$, máme

$$\int -\frac{3}{16}\frac{1}{(x^2+1)^2} \overset{C}{=} -\frac{3}{16}\left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x\right).$$

$x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Výsledný zlomek máme přímo ve tvaru rozkladu na parciální zlomky, budeme tedy přímo počítat integrál. Provedeme jej převedením jmenovatele na čtverec a goniometrickou substitucí.

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]^2}\,\mathrm{d}x$$

Převedeme na čtverec

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]^2}\,\mathrm{d}x$$

a použijeme lineární substituci $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = y$. Pak $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ a dostaneme

$$\frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{[y^2+1]^2}\,\mathrm{d}y.$$

Použijeme rekurentní vzorec jako v předchozím příkladě:

$$\frac{16}{9}\int \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{[y^2+1]^2}\,\mathrm{d}y \overset{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}}\left(\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2}\arctan y\right)$$

Vrátíme substituci

$$\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(\frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{1}{2}\arctan y\right) \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{8}{3\sqrt{3}}\left(\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$

Řešení:

Hledejme rozklad ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem a roznásobením dostaneme

$$x^2 = (Ax+B)(x^2+2x+2) + (Cx+D)$$

$$x^2 = Ax^3 + 2Ax^2 + 2Ax + Bx^2 + 2Bx + 2B + Cx + D$$

odkud vyplývá, že $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$ a $D = -2$. Hledaný rozklad má tvar

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \overset{C}{=} \arctan(x+1)$$

a

$$-\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \overset{C}{=} \frac{1}{x^2+2x+2}$$

odkud máme, že

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx \overset{C}{=} \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2}$$

$x \in \mathbb{R}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

Řešení:

Zlomek již máme připraven ve tvaru vhodném k integraci. Použijeme rekurentní vzorec.

Máme

$$I_1 \overset{C}{=} \arctan x$$

a

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Tedy

$$I_2 = \frac{x}{2\cdot 1(1+x^2)^1} + \frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x.$$

Dále

$$I_3 = \frac{x}{2\cdot 2(1+x^2)^2} + \frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2} I_2 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x\right)$$

Závěr:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3}{8}\frac{x}{(x^2+1)} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + c$$

$x \in \mathbb{R}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Řešení: Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2+3x-2 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x^2+x+1)(x-1) + (Dx+E)(x-1)$$

Roznásobením pravé strany máme

$$x^2+3x-2 = A-C-E+2Ax-Bx-Dx+Ex+3Ax^2+Dx^2+2Ax^3+Cx^3+Ax^4+Bx^4$$

odkud porovnáním koeficientů dostaneme, že

$$A = \frac{2}{9},\ B = -\frac{2}{9},\ C = -\frac{4}{9},\ D = \frac{1}{3},\ E = \frac{8}{3}$$

Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1} + \frac{1}{3}\frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}$$

Jednotlivé zlomky budeme integrovat zvlášť. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x-1|$$

$$-\frac{2}{9}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

a nakonec

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+8}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=}$$

(Druhý integrál počítáme převedením jmenovatele na kanonický tvar $(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}[(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1]$ a substitucí $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = y$.)

$$\overset{C}{=} \frac{-1}{6}\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{5}{6}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{10}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Dohromady dostaneme po úpravě

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{3}\frac{5x+2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$x \in (-\infty, 1)$, $x \in (1, \infty)$.

(f) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$

Řešení: Jmenovatel lze rozložit na součin kvadratických trojčlenů

$$(x^4+x^2+1)^2 = (x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$$

Z toho vyplývá, že rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Kx+L}{x^2-x+1} + \frac{Mx+N}{(x^2-x+1)^2}$$

Například metodou neurčitých koeficientů dostaneme, že

$$A = B = C = D = L = N = \frac{1}{4}, \quad K = M = -\frac{1}{4}$$

Integrací jednotlivých zlomků dostaneme po úpravách

$$\int \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\ln(x^2+x+1)$$

$$\int \frac{1}{4}\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

$$\int -\frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{4\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8}\ln(x^2-x+1)$$

$$\int -\frac{1}{4}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{6\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\frac{x+1}{x^2-x+1}$$

Sečtením a úpravami dostaneme, že

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{C}{=} \frac{5}{12\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{5}{12\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^2}$

Řešení: Platí, že

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

Rozklad tedy musíme hledat ve tvaru

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme

$$\begin{aligned}1 &= A(x+1)(x^2-x+1)^2 + B(x^2-x+1)^2 \\ &\quad + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) + (Ex+F)(x^2-x+1)^2\end{aligned}$$

Roznásobením pravé strany máme

$$1 = A+B+D+F-Ax-2Bx+Cx+Dx+2Fx+Ex+Ax^2+3Bx^2+Cx^2+Fx^2+2Ex^2+$$
$$+Ax^3 - 2Bx^3 + Dx^3 + Ex^3 - Ax^4 + Bx^4 + Cx^4 + Dx^4 + Ax^5 + Cx^5$$

odkud sestavíme porovnáním koeficientů soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + D + F \\
0 &= -A - 2B + C + D + E + 2F \\
0 &= A + 3B + C + F + 2E \\
0 &= A - 2B + D + E \\
0 &= -A + B + C + D \\
0 &= A + C
\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$A = \frac{2}{9},\ B = \frac{1}{9},\ C = -\frac{2}{9},\ D = \frac{1}{3},\ E = -\frac{1}{3},\ F = \frac{1}{3}$$

a hledaný rozklad tedy má tvar

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$

Budeme integrovat zvlášť jednotlivé zlomky. Platí, že

$$\int \frac{2}{9}\frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{9}\ln|x+1|$$

$$\int \frac{1}{9}\frac{1}{(x+1)^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{9}\frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{9}\frac{2x-3}{x^2-x+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{9}\frac{2x-1}{x^2-x+1}\ \mathrm{d}x - \int \frac{2}{9}\frac{1}{x^2-x+1}\ \mathrm{d}x \\
&\overset{C}{=} \frac{1}{9}\ln(x^2-x+1) - \frac{4}{9\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

a nakonec

$$\int \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{6}\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\ \mathrm{d}x - \int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\ \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{x^2-x+1} - \int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\ \mathrm{d}x$$

Zbylý integrál vypočteme pomocí substituce $y = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$:

$$\int \frac{1}{6}\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{9\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18}\frac{(2x-1)}{x^2-x+1}$$

Dáme-li jednotlivé výsledky dohromady, dostáváme

$$\int \frac{1}{(x^3+1)^2}\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{9(x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{9}\frac{x+1}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{1}{9} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \frac{x}{x^3+1}$$

$x \in (-\infty, 1)$, $x \in (1, \infty)$.

(h) $f(x) = \dfrac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

Řešení:

Proveďme substituci $t = x^5$.

$$\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\,\mathrm{d}x \to \frac{1}{5}\int \frac{t}{(t^2+2t+2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int \frac{2t}{(t+1)^2+1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{10}\int \frac{2t+2-2}{\left((t+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int \frac{2t+2}{\left((t+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left((t+1)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

Na oba integrály použijeme substituci $u = (t+1)^2+1$. Dostaneme

$$\frac{1}{10}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{10}\frac{1}{u} \to -\frac{1}{10}\frac{1}{(t+1)^2+1} = -\frac{1}{10}\frac{1}{t^2+2t+2} \to -\frac{1}{10}\frac{1}{x^{10}+2x^5+2}$$

Druhý integrál

$$\to -\frac{1}{10}\arctan(t+1) - \frac{1}{10}\frac{t+1}{(t+1)^2+1}$$

$$\to -\frac{1}{10}\arctan(x^5+1) - \frac{1}{10}\frac{x^5+1}{x^{10}+2x^5+2}$$

Dohromady

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{10}\frac{x^5+2}{x^{10}+2x^5+2} - \frac{1}{10}\arctan(x^5+1).$$

$x \in \mathbb{R}$

Zkouškové příklady

Příklady i s řešením máme od doc. Rokyty https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html

3. (a) $f(x) = \dfrac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)}$

Řešení: Nejprve substituujeme: $y = \log x$, $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $\log((0,\infty)) = \mathbb{R}$.

Dostaneme

$$\int \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}$$

Zkontrolujeme stupeň polynomů a podělíme:

$$\int \frac{y^2+y+1}{y^2-y+1}\,\mathrm{d}y = \int 1 + \frac{2y}{y^2-y+1}\,\mathrm{d}y = y + \int \frac{2y-1}{y^2-y+1}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y^2-y+1}\,\mathrm{d}y.$$

První integrál:
$$\int \frac{2y-1}{y^2-y+1}\,\mathrm{d}y = \log|y^2-y+1| + c$$
Druhý integrál:
$$\int \frac{1}{y^2-y+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}y = \int \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(y-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}$$

Dohromady
$$\int \frac{\log^2 x+\log x+1}{x(\log^2 x-\log x+1)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log x + \log(\log^2 x-\log x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\log x-1}{\sqrt{3}}$$
$x \in (0,\infty)$

(b) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}$

Řešení: Aplikujeme substituci $y = e^x,\ \mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$. Intervaly $(\alpha,\beta) = (-\infty,\infty)$, $(a,b) = (-1,\infty)$, $e^x((-\infty,\infty)) = (0,\infty) \subset (a,b)$.
Dostaneme
$$\int \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$$
Rozložíme na parciální zlomky
$$\int \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1}\,\mathrm{d}y$$
$$\overset{C}{=} -\frac{4}{y+2} + 4\log|y+2| - \frac{1}{y+1} - 4\log|y+1|$$

$x \in \mathbb{R}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2+2x+3)}$

Řešení: Rozložíme na parciální zlomky:
$$\int \frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{7}{6}}{x+3} + \frac{-\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{7}{6}\log|x+3| - \frac{1}{12}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

První integrál:
$$-\frac{1}{12}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{12}\log(x^2+2x+3)$$

Druhý integrál:

$$
\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{2}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{6}\int \frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Dohromady

$$
\int \frac{x^2+x+1}{(x+3)(x^2+2x+3)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{7}{6}\log|x+3| - \frac{1}{12}\log(x^2+2x+3) - \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}
$$

$x \in (-\infty,-3),(3,\infty)$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4+3x^3+10x^2+12x+13}{(1+x)(x^2+x+3)^2}$

Řešení: Rozložíme na parciální zlomky:

$$
\int \frac{x^4+3x^3+10x^2+12x+13}{(1+x)(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+x+3} + \frac{x+1}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x
$$

Jednotlivé integrály:

$$
\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \log|x+1|
$$

$$
\int \frac{1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\frac{1}{2}}{(x^2+x+3)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4})^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\frac{1}{2}}{(x^2+x+3)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{121}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{11}{4}}}\right)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Poslední integrál vyřešíme substitucí a rekurentním vzorcem. Pak

$$
\int \frac{x+1}{(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11}\cdot\frac{x-5}{(x^2+x+3)} + \frac{2}{121}\sqrt{11}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}
$$

Závěr:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x^4+3x^3+10x^2+12x+13}{(1+x)(x^2+x+3)^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad\overset{C}{=} \log|x+1| + \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{11}\cdot\frac{x-5}{(x^2+x+3)} + \frac{2}{121}\sqrt{11}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}} \\
&\quad= \log|x+1| + \frac{1}{11}\cdot\frac{x-5}{(x^2+x+3)} + \frac{24}{11\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}
\end{aligned}
$$

pro $x \in (-\infty,-1)$, $(-1,\infty)$.

(e) $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+3)}$

Řešení: Zkontrolujeme stupně polynomů a podělíme

$$\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x = \int x-1+\frac{-x^2+2x+4}{(x+1)(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x$$

Po rozkladu na parciální zlomky:

$$= \int x-1+\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{4}{3}x+1}{(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{3}\log|x+1|+\int\frac{-\frac{4}{3}x+1}{(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x$$

Poslední integrál:

$$\begin{aligned}\int\frac{-\frac{4}{3}x+1}{(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x+\frac{11}{3}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{3}\log(x^2+x+3)+\frac{2\sqrt{11}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

Závěr:

$$\int\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{(x+1)(x^2+x+3)}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{2}{3}\log(x^2+x+3)+\frac{2\sqrt{11}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$$

$x\in(-\infty,-1),(-1,\infty)$