11.+12. cvičení – Parciální zlomky

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Označme

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

Pak

$$I_1 \overset{C}{=} \arctan x, \qquad I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

Algoritmus

1. Zkontrolujeme **stupně** polynomů, případně podělíme.
2. **Rozložíme jmenovatele** na závorky (pro vyšší stupně polynomů: typicky zkusíme uhodnout kořen a pak podělíme mnohočleny).
3. Zkontrolujeme, zda nejdou **rozložit kvadratické trojčleny**.
4. **Rozložíme** na parciální zlomky.
5. **Zintegrujeme**.
6. Napíšeme **podmínky** a určíme **otevřené intervaly**.

Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. (a) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$
   (d)✤ $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}$
   (e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$
   (f) $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$
   (g) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)^2$
   (h) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$
2. (a) $f(x) = -\dfrac{3}{16}\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}$
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$
   (e) $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$
   (f)❀ $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}$
   (g) $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+1)^2}$
   (h)❄ $f(x) = \dfrac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

Zkouškové příklady

Příklady i s řešením máme od doc. Rokyty https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html

3. (a) $f(x) = \dfrac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)}$

   (b) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2 (e^x + 1)^2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x + 3)(x^2 + 2x + 3)}$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 12x + 13}{(1 + x)(x^2 + x + 3)^2}$

   (e) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)}$

(1d) pro rozklad (pro integraci ne!) uvažujte $t = x^2$
(2f) pro rozklad hledejte $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, roznásobte a porovnávejte člen po členu
(2h) substituce $t = x^5$