



10. cvičení – Substituce 2. typu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. Goniometrické substituce

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Řešení: Zvolme substituci $x = 2 \cos t$. Pak $dx = -2 \sin t dt$ a $4 - x^2 = 4(1 - \cos^2 t) = 4 \sin^2 t$. Intervaly budou: $t \in (0, \pi)$, pak $x \in (-2, 2)$. Navíc $-2 \sin t \neq 0$ na $(0, \pi)$ a funkce $2 \cos t$, $t \in (0, \pi)$ je na (surjekce). Dostáváme

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx \rightarrow \int \sqrt{4 \sin^2 t} (-2 \sin t) dt = \int -4 |\sin t| \sin t dt$$

Protože jsme na intervalu $(0, \pi)$, tak $|\sin t| = \sin t$ a

$$\int -4 |\sin t| \sin t dt = -4 \int \sin^2 t dt.$$

Poslední integrál lze vyřešit dvěma per partes nebo přepisem $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$. Pak

$$-4 \int \sin^2 t dt = -4 \int \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -4 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + c$$

Celkem tedy pro $x \in (-2, 2)$ máme

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = -4 \left(\frac{\arccos(x/2)}{2} - \frac{\sin(2 \arccos(x/2))}{4} \right) + c$$

(b) $f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$

Řešení: Definiční obor funkce f je interval $(-1, 1)$, stačí tedy určit primitivní funkci na tomto intervalu. Provedeme substituci $x = \sin t$. Protože $x \in (-1, 1)$, je $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

$$dx = \cos t dt,$$

a protože $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} dx \rightarrow \int \frac{1}{(1 - \sin^2 t)^{3/2}} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^3 t} \cos t dt = \int \frac{1}{\cos^2 t} \stackrel{C}{=} \tan t$$

a s přihlédnutím k tomu, že pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, dostaneme

$$= \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(c) f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, a > 0$$

Řešení: Z podmínky na integrand máme $x \in (-a, a)$. Použijeme substituci $x = a \sin t$. Intervaly budou $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Navíc $dx = a \cos t dt$.

Potom

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx &= \int a \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} \cos t dt \rightarrow \int a \sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \\ &= \int a(1+\sin t) dt \stackrel{C}{=} at - a \cos t \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

$$(d) f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, a > 0$$

Řešení: Lze použít substituci $a \sinh t$, ale ukážeme si jiný postup, použijeme substituci $x = a \operatorname{tg} t$. Intervaly: $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ a s přihlédnutím ke vztahu $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &\rightarrow \int \frac{1}{a^3 \cdot (\operatorname{tg}^2 t + 1)^{3/2}} \frac{a}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{a^2} \cos t dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2} \sin t \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \end{aligned}$$

přičemž poslední vztah plyne z výpočtu

$$\operatorname{tg}^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t} \rightarrow \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \implies \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}}.$$

2. Hyperbolické:

$$(a) f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}, a > 0$$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Intervaly: $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Potom $dx = a \cosh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx &\rightarrow \int a^2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (t + \cosh t \sinh t) \\ \rightarrow \int f(x) dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

Integrál $\int \cosh^2 t$ lze spočítat rozepsáním do $\int \frac{1}{4}(e^{-2t} + e^{2t} + 2)$, pomocí per partes nebo pomocí vzorce $\cosh^2 t = (1 + \cosh(2t))/2$.

$$(b) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}, a > 0$$

Řešení: Použijeme substituci $x = a \sinh t$. Intervaly $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Potom $dx = a \cosh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx &\rightarrow \int \frac{a^2 \sinh^2 t}{a \cosh t} a \cosh t dt = a^2 \int \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} [t - \sinh t \cosh t] \\ \rightarrow \int f(x) dx &\stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} \operatorname{arg} \sinh \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} \end{aligned}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

Řešení: Provedeme substituci $x = \sqrt{2} \cosh t$. Intervaly: $x \in (\sqrt{2}, \infty)$, $t \in (0, \infty)$.
Potom $dx = \sqrt{2} \sinh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx &\rightarrow \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sqrt{2} \sinh t} \sqrt{2} \sinh t dt = \int 2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} (t + \sinh t \cosh t) \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \arg \cosh \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \stackrel{C}{=} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \end{aligned}$$

Pro $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$, uvažujme substituci $x = -\sqrt{2} \cosh t$, $t \in (0, \infty)$. Pak

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx \rightarrow \int \frac{2 \cosh^2 t}{\sqrt{2} \sqrt{\sinh^2 t}} (-\sqrt{2} \sinh t) dt = - \int 2 \cosh^2 t dt \stackrel{C}{=} - (t + \sinh t \cosh t)$$

Vyjádríme $-\frac{x}{\sqrt{2}} = \cosh t$, tedy $t = \arg \cosh -\frac{x}{\sqrt{2}}$.

Navíc $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$, tedy $|\sinh t| = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$.

Tedy

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx \stackrel{C}{=} - \arg \cosh -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2} \stackrel{C}{=} - \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 2} \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 2}$$

$$(d) f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$$

Řešení:

Použijeme substituci $x = a \cosh t$. Pracujeme na intervalech $x \in (a, \infty)$ a $t \in (0, \infty)$.

Potom $dx = a \sinh t dt$ a platí

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &\rightarrow \int a^2 \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} (\cosh t \sinh t - t) \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \arg \cosh \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Lze také psát

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Pro interval $x \in (-\infty, -a)$ uvažujme substituci $x = -a \cosh t$ a $t \in (0, \infty)$. Pak dostaneme

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \rightarrow \int -a^2 \sinh^2 t dt \stackrel{C}{=} -\frac{a^2}{2} (\cosh t \sinh t - t)$$

Vyjádríme $-\frac{x}{a} = \cosh t$, tedy $t = \arg \cosh -\frac{x}{a}$.

Navíc $\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1$, tedy $|\sinh t| = \sqrt{\cosh^2 t - 1}$.

Tedy

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx \stackrel{C}{=} \frac{a^2}{2} \arg \cosh -\frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2}$$

Jiný přístup pro $x \in (-\infty, -a)$: Lze ukázat, že jestliže f je sudá, tak lze najít primitivní funkci $F(x)$, která bude lichá. (Pozor, obecně jakákoli taková F lichá být nemusí, záleží na konstantě $+C$.) Pak stačí vyjádřit F tak, aby byla lichá.

3. Směs

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{1+e^x}$. Intervaly $x \in \mathbb{R}$, $y \in (1, \infty)$. Pak $e^x = y^2 - 1$, tedy $x = \ln(y^2 - 1)$. Dopočteme $dx = \frac{2y}{y^2-1} dy$. Odtud máme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx &\rightarrow \int \frac{1}{y} \frac{2y}{y^2-1} dy = 2 \int \frac{1}{y^2-1} dy \stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}} \right| \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$

Řešení: Substituce $y = \sqrt{4x-7}$. Intervaly $x \in (\frac{7}{4}, \infty)$, $y \in (0, \infty)$. Pak $(y^2+7)/4 = x$ a $y/2 dy = dx$. Pak

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\sqrt{4x-7}+3} dx &\rightarrow \int \frac{5}{y+3} \frac{y}{2} dy = \frac{5}{2} \int \frac{y}{y+3} dy = \frac{5}{2} \int 1 - \frac{3}{y+3} dy = \\ &\frac{5}{2}(y - 3 \ln |y+3|) + c \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{5}{2}(\sqrt{4x-7} - 3 \ln |\sqrt{4x-7}+3|) + c \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \sin \sqrt{x}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt{x}$. Intervaly $x \in (0, \infty)$, $y \in (0, \infty)$. Pak $y^2 = x$ a $2y dy = dx$. Potom

$$\int \sin \sqrt{x} dx \rightarrow \int 2y \sin y dy$$

Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme $v = 2y$, $u' = \sin y$. Pak $v' = 2$, $u = -\cos y$. Máme

$$\int 2y \sin y dy = -2y \cos y + 2 \int \cos y dy = -2y \cos y + 2 \sin y + c$$

Zpětně zasubstituujeme a dostaneme

$$\int \sin \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + c.$$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

Řešení: Zvolme substituci $y = \sqrt[6]{x}$. Intervaly $x \in (0, \infty)$, $y \in (0, \infty)$. Pak $y^6 = x$ a $6y^5 dy = dx$. Máme

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx \rightarrow \int \frac{y^3}{1+y^2} 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^8}{1+y^2} dy =$$

Provedeme dělení mnohočlenů a získáme

$$6 \int \frac{y^8}{1+y^2} dy = 6 \int y^6 - y^4 + y^2 - 1 + \frac{1}{1+y^2} dy = 6 \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^3}{3} - y + \arctan y \right) + c$$

Vrátíme substituci:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx = 6 \left(\frac{x^{7/6}}{7} - \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{x^{1/2}}{3} - x^{1/6} + \arctan x^{1/6} \right) + c$$