



10. cvičení – Substituce 2. typu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Substituce

Věta 1 (první věta o substituci). Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) . Necht' φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b) , která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci). Necht' $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Necht' $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Necht' f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\arg \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\arg \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \arg \coth x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. ☞ Goniometrické substituce

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, $a > 0$

(b) $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

(d) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, $a > 0$

2. ♡ Hyperbolické:

(a) $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}, a > 0$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}, a > 0$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$

3. ✨ Směs

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$

(b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x - 7} + 3}$

(c) $f(x) = \sin \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

$x = \ln \frac{1}{a} = -\ln a = \ln a^{-1}$ (př)	$x = \ln a = \ln a^1$ (2b) •
$x = \ln a^b = b \ln a$ (3c) •	$x = \ln a^b = b \ln a$ (2a) •
$\ln \frac{1}{a+b} = -\ln(a+b)$ (3b) •	$\ln a^b = b \ln a$ (1d) •
$\ln \frac{1}{a-b} = -\ln(a-b)$ (3a) •	$\ln a^b = b \ln a$ (1c) •
$x = \ln a^b = b \ln a$ (2d) •	$x = \ln a^b = b \ln a$ (1b) •
$x = \ln a^b = b \ln a$ (2c) •	$x = \ln a^b = b \ln a$ (1a) •