9. cvičení – Per partes, substituce 2 + lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. (a) $\int \arctan x \,\mathrm{d}x$

   Řešení:
   Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int 1 \cdot \arctan x \, dx = [x \arctan x] - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

   Substituce $y = 1 + x^2$.

$$-\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \to -\frac{1}{2}\int \frac{1}{y} \, dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\log|y| \to -\int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

   Tedy dohromady

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

   $x \in \mathbb{R}$

   (b) $\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, dx \to \int \frac{dy}{1-y^2} \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

$$\to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$$

   Funkce $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ je definována na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.
   Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (-1, 1)$.
   Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) $\int \operatorname{cotg} x \,\mathrm{d}x$

   Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x \, dx$ a platí

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \to \int \frac{dy}{y} \overset{C}{=} \log|y| \to \int f(x) \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln|\sin x|$$

Funkce $\cot x$ je definována na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ (nebo $[-1, 0)$).

Funkce $f = \frac{1}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a, b) = (0, \infty)$ (nebo $(-\infty, 0)$). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(d) $\displaystyle\int x \log \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \log \frac{1+x}{1-x}$, $v' = \frac{2}{1-x^2}$.

$$\int x \log \frac{1+x}{1-x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1 - x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \log \frac{1+x}{1-x} - \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x^2 \log \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$x \in (-1, 1)$

(e) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x - \cos x$. Potom $dy = \cos x + \sin x$ a platí

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \, dx \to \int \frac{dy}{y^{1/3}} \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} y^{2/3}$$

$$\to \int f(x) \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x}$$

Funkce $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$ je definována na $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x - \cos x$, interval $(\alpha, \beta) = (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (0, \sqrt{2})$ pro sudá k a Platí $(\sin - \cos)((\alpha, \beta)) = (-\sqrt{2}, 0)$ pro lichá k.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ má primitivní funkci na intervalech $(a, b) = (0, \infty)$ (ten vezmeme pro sudá k) nebo na $(a, b) = (-\infty, 0)$ (ten pro lichá k). Protože $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha, \beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Není potřeba najít přesně interval $(0, \sqrt{2})$, důležité je jen ověřit vztah $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$.)

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \, \mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \to 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy \stackrel{C}{=} 2 \arcsin y$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} 2\arcsin\sqrt{x}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalu $(0,1)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x}$ a $(\alpha,\beta) = (0,1)$. Pak $\sqrt{(}(0,1)) = (0,1)$.

Funkce $f = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ má primitivní funkci na intervalu $(-1,1)$. Protože $\sqrt{(}(\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0,1)$.

(g) $\displaystyle\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

První per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$.

$$\int x^2e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}\right] + \int xe^{-2x}\,dx =$$

Druhé per partes: $u' = e^{-2x}$, $u = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right] + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}\int e^{-2x}$$

$x \in \mathbb{R}$

(h) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak platí

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\,\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{\sin x}\cos x\,dx$$

$$\to \int \frac{1-y^2}{y}\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy - \int y\,dy \overset{C}{=} \log|y| - \frac{y^2}{2} \to \int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2}$$

Funkce $\frac{\cos^3}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}$ je definována na $(0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci. Jeden z nich zafixujeme.

Pro substituci máme $\varphi = \sin x$, interval $(\alpha,\beta) = (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Platí $\sin((\alpha,\beta)) = (0,1]$ (nebo $[-1,0)$).

Funkce $f = \frac{1-y^2}{y}$ má primitivní funkci na intervalu $(a,b) = (0,\infty)$ (nebo $-\infty,0)$). Protože $\sin((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (\alpha,\beta)$. Protože takhle můžeme zafixovat interval pro každé k, dostáváme celkem $x \in (0+k\pi, \pi+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x^2+1}$. Potom $dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ a $y^2 - 1 = x^2$ a platí

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \to \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{1}{1-y^2}\,dy \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

$$\to \int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1-\sqrt{x^2+1}}$$

Primitivní funkci budeme hledat na intervalech $(0,\infty)$ a $(-\infty,0)$, protože tam je definována funkce $\frac{1}{x\sqrt{(1+x^2)}}$.

Položme $\varphi = \sqrt{x^2+1}$ a $(\alpha,\beta) = (0,\infty)$ (nebo $(-\infty,0)$). Pak $\varphi((\alpha,\beta)) = (1,\infty)$ (v obou případech).

Funkce $f = \frac{1}{1-y^2}$ má primitivní funkci speciálně na intervalu $(1,\infty)$. Protože $\varphi((\alpha,\beta)) \subseteq (a,b)$, tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro $x \in (0,\infty)$ i pro $x \in (-\infty,0)$.

(j) $\displaystyle\int x \arctan x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x$, $u = \frac{x^2}{2}$, $v = \arctan x$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x$$

$x \in \mathbb{R}$

(k) $\displaystyle\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \log(x+\sqrt{1+x^2})$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int 1\cdot\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx = \left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] - \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \stackrel{C}{=}$$

$$x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$$

Poslední integrál lze počítat např. substitucí $y = 1+x^2$.

$x \in \mathbb{R}$

(l) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \sin(\log x)$. Potom $v = x$ a $u' = \cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1\cdot\sin(\log x) = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \cos(\log x)$ a dostaneme

$$\int 1\cdot\sin(\log x) = x\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int\sin(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2\int 1\cdot\sin(\log x) \stackrel{C}{=} x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$\int\sin(\log x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

$x \in (0,\infty)$

(m) $\displaystyle\int x^n \log x \,\mathrm{d}x,\ n \neq -1$

Řešení:
Položme $u' = x^n$, $v = \log x$. Potom $u = x^{n+1}/n+1$ a $v' = \frac{1}{x}$. Integrace per partes dává

$$\int x^n \log x \,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} \,dx \overset{C}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$x \in (0, \infty)$

(n) $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$

Řešení:
Pro $b = 0$ je $\int e^{ax} \sin(0x)\ \mathrm{d}x = \int 0\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} 1$.
Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\ \mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} -\frac{b}{a^2+b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{a^2+b^2} e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.
$x \in \mathbb{R}$

2. (a) $f(x) = |x|$
Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0), \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^2}{2} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 a c_2 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0-} -\frac{x^2}{2} + c_1 = c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{2} + c_2 = c_2$$

Dostáváme

$$c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ c_1, & x = 0, \\ \frac{x^2}{2} + c_1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, -1), \\ 1, & x \in (-1, 1), \\ x^2, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + c_1, & x \in (-\infty, -1), \\ x + c_2, & x \in (-1, 1), \\ \frac{x^3}{3} + c_3, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1, c_2 a c_3 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \to -1-} F(x) = \lim_{x \to -1-} \frac{x^3}{3} + c_1 = -\frac{1}{3} + c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \to -1+} F(x) = \lim_{x \to -1+} x + c_2 = -1 + c_2$$

Dostáváme

$$c_1 = -\frac{2}{3} + c_2.$$

Dále

$$\lim_{x \to 1+} F(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{x^3}{3} + c_3 = \frac{1}{3} + c_3$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1-} x + c_2 = 1 + c_2$$

Dostáváme

$$c_3 = \frac{2}{3} + c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} + c_2, & x \in (-\infty, -1), \\ -1 + c_2, & x = -1, \\ x + c_2, & x \in (-1, 1), \\ 1 + c_2, & x = 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} + c_2, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(c) $f(x) = \sqrt{x^6}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \in (-\infty, 0), \\ x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ \frac{x^4}{4} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 a c_2 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^4}{4} + c_2 = c_2$$

se musí rovnat

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-} -\frac{x^4}{4} + c_1 = c_1$$

Dostáváme

$$c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^4}{4} + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ c_1, x = 0, \\ \frac{x^4}{4} + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(d) $f(x) = e^{-|x|}$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0), \\ e^{-x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ -e^{-x} + c_2, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

Najdeme konstanty c_1 a c_2 tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-} e^x + c_1 = 1 + c_1$$

se musí rovnat

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} -e^{-x} + c_2 = -1 + c_2$$

Dostáváme

$$2 + c_1 = c_2.$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \in (-\infty, 0), \\ 1 + c_1, & x = 0, \\ -e^{-x} + 2 + c_2, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(e) $f(x) = |\sin x|$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ -\sin x, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + A_k, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ \cos x + B_k, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty A_k a B_k tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \to (0+2k\pi)+} F(x) = \lim_{x \to (0+2k\pi)+} -\cos x + A_k = -1 + A_k.$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \to (0+2k\pi)-} F(x) = \lim_{x \to (0+2k\pi)-} \cos x + B_{k-1} = 1 + B_{k-1}.$$

Dostáváme

$$-1 + A_k = 1 + B_{k-1}.$$

Analogicky

$$\lim_{x \to (\pi+2k\pi)+} F(x) = \lim_{x \to (\pi+2k\pi)+} \cos x + B_k = -1 + B_k.$$

se musí rovnat

$$\lim_{x \to (\pi+2k\pi)-} F(x) = \lim_{x \to (\pi+2k\pi)-} -\cos x + A_k = 1 + A_k.$$

Dostáváme

$$1 + A_k = -1 + B_k.$$

Dohromady

$$\begin{aligned} B_{k-1} + 2 &= A_k \\ B_k &= 2 + A_k \\ B_k &= 4 + B_{k-1} \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} B_k &= B_0 + 4k \\ A_k &= B_0 + 4k - 2 \end{aligned}$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} B_0 + 4k - 3, & x = 0 + 2k\pi, \\ -\cos x + B_0 + 4k - 2, & x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ 4k - 1 + B_0, & x = \pi + 2k\pi, \\ \cos x + 4k + B_0, & x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi). \end{cases}$$

(f) $f(x) = |\sin x + \cos x|$

Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sin x - \cos x, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} -\cos x + \sin x + A_k, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ \cos x - \sin x + B_k, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty A_k a B_k tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x \to (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)-} F(x) = \lim_{x \to (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)-} \cos x - \sin x + B_{k-1} = \sqrt{2} + B_{k-1}$$

a

$$\lim_{x \to (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)+} F(x) = \lim_{x \to (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)+} -\cos x + \sin x + A_k = -\sqrt{2} + A_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + B_{k-1} = -\sqrt{2} + A_k$$

Dále

$$\lim_{x \to (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)-} F(x) = \lim_{x \to (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)-} -\cos x + \sin x + A_k = \sqrt{2} + A_k$$

a

$$\lim_{x \to (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)+} F(x) = \lim_{x \to (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)+} \cos x - \sin x + B_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dohromady

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} + B_{k-1} &= A_k \\ 2\sqrt{2} + A_k &= B_k \\ 4\sqrt{2} + B_{k-1} &= B_k \end{aligned}$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{2} + B_{k-1}, & x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\cos x + \sin x + 2\sqrt{2} + B_{k-1}, & x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi), \\ 3\sqrt{2} + B_{k-1}, & x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \cos x - \sin x + 4\sqrt{2} + B_{k-1}, & x \in (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

(g) $f(x) = \sqrt{1-\sin 2x}$
Řešení: Funkce $f(x)$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci. Rozepíšeme

$$\sqrt{1-\sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x\cos x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x|$$

Tedy

$$f(x) = \begin{cases} \cos - \sin x, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\cos x + \sin x, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Zintegrujeme

$$F(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x + A_k, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ -\sin x - \cos x + B_k, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$

Najdeme konstanty A_k a B_k tak, aby F byla spojitá funkce. Tedy

$$\lim_{x\to(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi)-} F(x) = \lim_{x\to(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi)-} -\sin x - \cos x + B_{k-1} = \sqrt{2} + B_{k-1}$$

a

$$\lim_{x\to(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi)+} F(x) = \lim_{x\to(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi)+} \sin x + \cos x + A_k = -\sqrt{2} + A_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + B_{k-1} = -\sqrt{2} + A_k$$

Dále

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4}+2k\pi)-} F(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{4}+2k\pi)-} \sin x + \cos x + A_k = \sqrt{2} + A_k$$

a

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+} F(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+} -\sin x - \cos x + B_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dostáváme

$$\sqrt{2} + A_k = -\sqrt{2} + B_k$$

Dohromady

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} + B_{k-1} &= A_k \\ 2\sqrt{2} + A_k &= B_k \\ 4\sqrt{2} + B_{k-1} &= B_k \end{aligned}$$

Závěr:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{2} + B_{k-1}, & x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \sin x + \cos x + 2\sqrt{2} + B_{k-1}, & x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi), \\ 3\sqrt{2} + B_{k-1}, & x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\sin x - \cos x + 4\sqrt{2} + B_{k-1}, & x \in (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi). \end{cases}$$