9. cvičení – Per partes, substituce 2 + lepení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

Věta 2. Nechť f je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu I. Potom f má na I primitivní funkci.

Algoritmus pro lepení

1. **Zintegrujeme** funkci **zvlášť** na každém intervalu, kde to umíme. (Intervaly nám dá předpis funkce, odmocnina, absolutní hodnota, max/min, sgn, Věta o substituci…)
2. Zkontrolujeme, na jakém otevřeném intervalu je funkce f **spojitá** - tam budeme hledat PF. Najdeme body, kde se funkce musí slepit.
3. Spočteme **limity** zleva a zprava a upravíme jednotlivé **konstanty** tak, aby výsledek byl spojitý.
4. Aplikujeme větu 2 - ta říká, že jsme to slepili správně.

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. (a) $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$
   (b) ♡ $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
   (c) ❄ $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$
   (d) $\int x \ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x$
   (e) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\,\mathrm{d}x$
   (f) ✿ $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$
   (g) $\int x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
   (h) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$
   (i) ❀ $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
   (j) $\int x \arctan x\,\mathrm{d}x$
   (k) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$
   (l) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$
   (m) $\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x,\ n \neq -1$
   (n) $\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

2. (a) $f(x) = |x|$
   (b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x^6}$
   (d) $f(x) = e^{-|x|}$
   (e) $f(x) = |\sin x|$
   (f) $f(x) = |\sin x + \cos x|$
   (g) ✤ $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

(1b) $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$ (1c) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
(1f) $y = \sqrt{x}$
(1h) $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$
(1i) $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
(2g) $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x} = |\cos x - \sin x|$