7. cvičení – Teoretické úložky na řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) $\sum a_n$ konverguje.
   (b) $\sum (-1)^n a_n$ konverguje.
   (c) $\sum |a_n|$ konverguje.
   (d) $\sum a_n^2$ konverguje.

   Řešení:

   - (c) $\to$ (a): Absolutní konvergence implikuje konvergenci (věta).
   - (a) $\not\to$ (c): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   - (a) $\not\to$ (b): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   - (b) $\not\to$ (a): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   - (c) $\to$ (b): $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, která konverguje.
   - (a) $\not\to$ (d): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   - (b) $\not\to$ (d): Protipříklad $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
   - (d) $\not\to$ (a): Protipříklad $a_n = \frac{1}{n}$
   - (d) $\not\to$ (c): Protipříklad $a_n = \frac{1}{n}$
   - (d) $\not\to$ (b): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   - (c) $\to$ (d): Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní, tak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, tedy $|a_n|$ je omezená: $|a_n| \leq M$ pro nějaké $M > 0$.
     Pak
     $$\sum a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M|a_n|,$$
     která je konvergentní.
     —
     Z předchozího pak plyne:
   - (b) $\not\to$ (c)

2. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.
   (c) $\sum a_n$ konverguje.
   (d) $\sum |a_n|$ konverguje.

   Řešení:

   - (d) $\to$ (c): Absolutní konvergence implikuje konvergenci (věta).
   - (c) $\to$ (b): Z nutné podmínky konvergence máme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
     Pak $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{n} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot 0$.
   - (a) $\to$ (b): $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} n a_n \cdot \frac{1}{n^2} \overset{VOAL}{=} 0 \cdot 0$.
   - (c) $\not\to$ (d): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   - (a) $\not\to$ (d): Protipříklad $a_n = \frac{1}{n \ln n}$
   - (a) $\not\to$ (c): Protipříklad $a_n = \frac{1}{n \ln n}$

- (b) $\not\to$ (a): Protipříklad $a_n = 1$
- (b) $\not\to$ (d): Protipříklad $a_n = 1$
- (c) $\not\to$ (a): Protipříklad $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- (d) $\not\to$ (a): Protipříklad: $a_n = 1/n$, pokud $n = 2^k$, $k \in \mathbb{Z}$, jinak $a_n = 0$ (jde o výběr z geometrické řady).
  Pak $\lim na_n$ neexistuje (střídají se 1 a 0).
  Pokud ale $\lim_{n\to\infty} na_n$ existuje, tak už musí být rovna 0. Konkrétně ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} n|a_n| = 0$, odtud už plyne $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.
  Pro spor předpokládejme, že $L = \lim_{n\to\infty} n|a_n| > 0$. Pak od jistého n_0 je $n|a_n| > L/2 > 0$ a tedy $|a_n| > \frac{L}{2n}$. Řada podle srovnávacího kritéria konvergovat nemůže.
  —
  Z předchozího pak plyne:
- (d) $\to$ (b)
- (b) $\not\to$ (c)

3. Dokažte nebo najděte protipříklad
   (a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je absolutně konvergentní.
   Řešení: Pravda. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Tedy b_n je omezená - existuje $M > 0$ tak, že $|b_n| \leq M$. Pak
   $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M|a_n|,$$
   která konverguje.
   (b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Nechť navíc $|a_n - b_n| \leq c_n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
   Řešení: Pravda.
   Platí
   $$0 \leq |a_n - b_n| \leq c_n.$$
   Ze srovnávacího kritéria tedy konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + (-b_n)|$, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + (-b_n)$.
   Pak ale buď obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují nebo obě divergují. Kdyby jedna konvergovala a druhá divergovala, tak by jejich součet také musel být divergentní.
   (c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a b_n je omezená posloupnost. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.
   Řešení: Nepravda. Protipříklad: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = (-1)^n$.
4. Najděte posloupnost a_n, pro niž $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a pro každé $\alpha \geq 1$ je
   $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha} = \infty.$$

Řešení: $a_n = \frac{1}{\ln n}$

5. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $a_n \geq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.
   Řešení: $a_n = 0$, $b_n = -\frac{1}{n}$.
6. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $|a_n| \geq |b_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.
   Řešení: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.
7. Najděte konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
   Řešení: Nechť $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.
   Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle Leibnize, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, protože jde o součet konvergentní a divergentní řady. Navíc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

8. Najděte posloupnosti a_n a b_n tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je divergentní, ale přitom a_n a b_n splňují vždy dvě ze tří následujících podmínek:
   (a) $a_n = (-1)^n$,
   (b) $b_{n+1} \leq b_n$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

   Řešení:
   (a) $a_n = 1$, $b_n = \frac{1}{n}$
   (b) $b_n = \frac{1}{n}$ pro lichá n, a $b_n = \frac{1}{n^2}$ pro sudá n. Tato řada je divergentní, protože součet konvergentní $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$ a divergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je divergentní
   (c) $b_n = 1$