7. cvičení – Teoretické úložky na řady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1. Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) $\sum a_n$ konverguje.
   (b) $\sum (-1)^n a_n$ konverguje.
   (c) $\sum |a_n|$ konverguje.
   (d) $\sum a_n^2$ konverguje.

2. ♡ Které implikace mezi následujícími tvrzeními platí?

   (a) $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.
   (c) $\sum a_n$ konverguje.
   (d) $\sum |a_n|$ konverguje.

3. Dokažte nebo najděte protipříklad

   (a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou absolutně konvergentní. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je absolutně konvergentní.
   (b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Nechť navíc $|a_n - b_n| \leq c_n$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
   (c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a b_n je omezená posloupnost. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4. ❄ Najděte posloupnost a_n, pro niž $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a pro každé $\alpha \geq 1$ je
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\alpha} = \infty.$$

5. Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $a_n \geq b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.

6. ❀ Najděte posloupnosti a_n a b_n takové, že $|a_n| \geq |b_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní.

7. ♣ Najděte konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a divergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

8. Najděte posloupnosti a_n a b_n tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ je divergentní, ale přitom a_n a b_n splňují vždy dvě ze tří následujících podmínek:

   (a) $a_n = (-1)^n$,
   (b) $b_{n+1} \leq b_n$,
   (c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(2) Jak vypadá $\limsup n|a_n|$?
(4) $1/\ln n$
(6) uvažujte neabsolutně konvergentní řady
(7) $(-1)^n/\sqrt{n}$, $(-1)^n/\sqrt{n} + \frac{1}{n}$