



## 6. cvičení – Primitivní funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Teorie

**Definice 1.** Necht' funkce  $f$  je definována na neprázdném otevřeném intervalu  $I$ . Řekneme, že funkce  $F$  je *primitivní funkce k  $f$  na  $I$* , jestliže pro každé  $x \in I$  existuje  $F'(x)$  a platí  $F'(x) = f(x)$ .

**Věta 2** (Rovnost až na konstantu). Necht'  $F$  a  $G$  jsou primitivní funkce k funkci  $f$  na otevřeném intervalu  $I$ . Pak existuje  $c \in \mathbb{R}$  takové, že  $F(x) = G(x) + c$  pro každé  $x \in I$ .

**Věta 3** (Linearita neurčitého integrálu). Necht'  $f$  má na otevřeném intervalu  $I$  primitivní funkci  $F$ , funkce  $g$  má na  $I$  primitivní funkci  $G$  a  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Potom funkce  $\alpha F + \beta G$  je primitivní funkcí k  $\alpha f + \beta g$  na  $I$ .

**Poznámka 4.** Značení  $\int f$  tady znamená množinu primitivních funkcí,  $F = \int f$  znamená, že  $F$  je primitivní k  $f$ .

### Hinty

$$\begin{array}{ll}
 x^{-a} = \frac{1}{x^a} & \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
 x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} & a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\
 a^b = e^{b \ln a} & 
 \end{array}$$

### Příklady

1. Najděte primitivní funkce  $F$  k následujícím funkcím  $f$  na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \ f(x) = x^{13} & \text{(h)} \ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} + 1 + x^2 \\
 \text{(b)} \ f(x) = \sqrt{x} & \text{(i)} \ f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \\
 \text{(c)} \ f(x) = \frac{1}{x^3} & \text{(j)} \ f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} \\
 \text{(d)} \ f(x) = \frac{1}{x} & \text{(k)} \ f(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x) \\
 \text{(e)} \ f(x) = (1 + \sin x + \cos x) & \text{(l)} \ f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \\
 \text{(f)} \ f(x) = 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{1+x^2} & \\
 \text{(g)} \ f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - e^x & 
 \end{array}$$

2. Dokažte, že pokud  $F'(x) = f(x)$ , potom  $(\frac{1}{a}F(ax+b) + C)' = f(ax+b)$ , pokud  $a \neq 0$ .

3. Najděte primitivní funkce  $F$  k následujícím funkcím  $f$  na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \ f(x) = \cos(3x) & \text{(d)} \ f(x) = \frac{1}{1+4x^2} \\
 \text{(b)} \ f(x) = \sin(2x - \pi) & \text{(e)} \ f(x) = \frac{1}{1-4x} \\
 \text{(c)} \ f(x) = e^{5-3x} & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad f(x) &= (2x + 1)^7 \\
 \text{(g)} \quad f(x) &= e^{3x} + \frac{7}{x} \\
 \text{(h)} \quad f(x) &= (e^{-x} + e^{-2x}) \\
 \text{(i)} \quad f(x) &= (3 - x^2)^3 \\
 \text{(j)} \quad f(x) &= (\sin 5x - \sin 5\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \\
 \text{(k)} \quad f(x) &= \frac{1}{x-2} + (3x+7)^5 \\
 \text{(l)} \quad f(x) &= \frac{1}{\sin^2(2x + \frac{\pi}{4})} \\
 \text{(m)} \quad f(x) &= \frac{-2}{\sqrt{1-2x^2}} \\
 \text{(n)} \quad f(x) &= \frac{1}{x+A}
 \end{aligned}$$

4. Najděte primitivní funkce  $F$  k následujícím funkcím  $f$  na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \text{✳} \quad f(x) &= \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} + \frac{4}{1 - \cos^2 x} \\
 \text{(b)} \quad \text{✿} \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{4 - (3x - 1)^2}} \\
 \text{(c)} \quad f(x) &= (1 - \sqrt{x})^2 \\
 \text{(d)} \quad \heartsuit \quad f(x) &= \tan^2 x \\
 \text{(e)} \quad f(x) &= \frac{x^2}{1 + x^2} \\
 \text{(f)} \quad f(x) &= \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} \\
 \text{(g)} \quad f(x) &= (2^x + 3^x)^2 \\
 \text{(h)} \quad f(x) &= \frac{1}{2 + 3x^2} \\
 \text{(i)} \quad f(x) &= \cotg^2 x \\
 \text{(j)} \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}} \\
 \text{(k)} \quad f(x) &= \left( \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right), a \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

5. Najděte takovou funkci, aby  $f'(x) = 6x(1 - x)$  a  $f(0) = 1$ .

6. Najděte chyby

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \int x^2 e^x dx &= \frac{1}{3} x^3 e^x + c \\
 \text{(b)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= x \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + c
 \end{aligned}$$

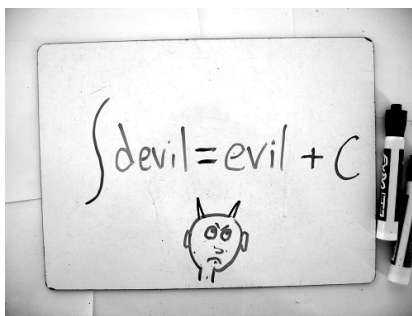


Figure 1: <https://mathwithbaddrawings.com/2013/05/27/calculus-joke/>

$$\begin{aligned}
 \text{(A)} \quad \frac{x}{1-x^2} &= \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \\
 \text{(B)} \quad \frac{x}{1-x^2} &= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1+x} \\
 \text{(C)} \quad \frac{x}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)
 \end{aligned}$$