5. cvičení – Řady - Směs

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad.

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$

Řešení:

- Konvergence.
Aplikujeme Dirichletovo kritérium. Posloupnost $a_n = \sin n$ má omezené částečné součty.
Posloupnost $b_n = \frac{n+1}{n^2+n+10}$ je nezáporná. Dále

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{n+1}{n^2+n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+1+10\cdot\frac{1}{n}} = 0.$$

Posloupnost b_n je nerostoucí: Uvažujme funkci $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+10}$. Na $\mathbb{R}$ derivujme.

$$f'(x) = \frac{-x^2-2x+9}{(x^2+x+10)^2}$$

Čitatel má kořeny $x = 1 \pm \sqrt{10}$, tedy pro $x > -1+\sqrt{10}$ je derivace záporná a tedy funkce je nerostoucí.
Odtud je posloupnost b_n nerostoucí pro $n \geq 3$.
Tedy z Dirichletova kritéria řada konverguje.

- Absolutní konvergence. Uvažujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} |\sin n|$$

Můžeme odhadnout

$$\frac{n+1}{n^2+n+10}|\sin n| \geq \frac{n+1}{n^2+n+10}\sin^2 n = \frac{n+1}{n^2+n+10}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2n)$$

Budeme tedy vyšetřovat řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n^2+n+10}$$

a

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10}\cos 2n$$

Provní řadu srovnáme LSK s $b_n = \frac{1}{n}$. Navíc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje. Obě řady mají nezáporné členy. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n^2+n+10}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

Tedy z LSK řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n^2+n+10}$ diverguje.
Dále řada $-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \cos 2n$ konverguje z Dirichletova kritéria. Posloupnost $\cos 2n$ má omezené částečné součty, ostatní argumenty jako výše.
Dohromady

$$\frac{n+1}{n^2+n+10} \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2n)$$

diverguje (součet divergentní a konvergentní řady).
Odtud ze SK diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} |\sin n|$

- Závěr: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$$

je neabsolutně konvergentní.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n^a}$

i. pro $a = 2$,

ii. v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Řešení:

- máme $a_n > 0$, tedy jde o řadu s kladnými členy. Položme $b_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{n^a} = \frac{1}{n^{2+a}}$. Pak $b_n > 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě tehdy, když $2 + a > 1$, tedy $a > -1$.
Z LSK:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n^a}}{\frac{\frac{1}{n^2}}{n^a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \in (0,\infty).$$

Výpočet z Heineho ($x_n = \frac{1}{n}$).
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje tehdy a právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, což je právě pro $a > -1$.
Speciálně pro $a = 2$ řada konverguje.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{3^n+1} - \sqrt[3]{3^n-1}$

Řešení:

Nejprve řadu upravíme

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[3]{3^n+1} - \sqrt[3]{3^n-1} &= \frac{3^n+1-3^n+1}{(\sqrt[3]{3^n+1})^2 + \sqrt[3]{3^n-1}\sqrt[3]{3^n+1} + (\sqrt[3]{3^n-1})^2} \\ &= \frac{2}{(\sqrt[3]{3^n+1})^2 + \sqrt[3]{3^n-1}\sqrt[3]{3^n+1} + (\sqrt[3]{3^n-1})^2} \end{aligned}$$

Máme $a_n > 0$, tedy jde o řadu s kladnými členy. Dále můžeme pomocí srovnávacího kritéria odhadnout

$$a_n = \frac{2}{(\sqrt[3]{3^n+1})^2 + \sqrt[3]{3^n-1}\sqrt[3]{3^n+1} + (\sqrt[3]{3^n-1})^2} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{3^{2n}}}$$

Tedy řešíme otázku, zda konverguje řada s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{3^{2n}}}$.
Z Cauchyho kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{\sqrt[3]{3^{2n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{3^{2/3}} = \frac{1}{3^{2/3}} < 1.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje a tedy konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{(n^2)}}$

i. pro $a = 2$,

ii. v závislosti na parametru $a > 0$.

Řešení:

- pro $a > 0$ je $a_n > 0$, tedy jde o řadu s kladnými členy. Z d'Alembertova kritéria máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{a^{(n^2+2n+1)}}}{\frac{n!}{a^{(n^2)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a^{2n+1}} = \begin{cases} \infty, & a \in (0,1], \\ 0, & a \in (1,\infty), \end{cases}$$

Tedy pro $a > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pro $0 < a \leq 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. (Zdůvodnění limity z Heineho a LH.)
Speciálně pro $a = 2$ řada konverguje.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}} - \sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}}}{\sqrt{n}}$

Řešení: Řadu nejprve upravíme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}} - \sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}}}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{n + \sqrt[5]{n} - n + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}})^2 + \sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}}\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}} + (\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}})^2} \\ &= \frac{\sqrt[5]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}})^2 + \sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}}\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}} + (\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}})^2} \end{aligned}$$

Máme $a_n > 0$, tedy jde o řadu s kladnými členy. Položme $b_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}} = n^{-11/12}$.
Pak $b_n > 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje (protože $\frac{11}{12} < 1$).
Z LSK:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[5]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}})^2 + \sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}}\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}} + (\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}})^2}}{\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n^2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2}}{(\sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}})^2 + \sqrt[3]{n + \sqrt[5]{n}}\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}} + (\sqrt[3]{n - \sqrt[4]{n}})^2} \\ &\overset{AL}{=} \frac{0+1}{1} \cdot \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \in (0,\infty). \end{aligned}$$

(Z odmocnin je třeba povytýkat a pak odůvodnit Heinem a VOLSF.)
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan a)^n}{n+\sqrt{n}}$,

i. pro $a = 1$,
ii. v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Řešení:
Položme $b = \arctan a$ a vyšetřujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n+\sqrt{n}},$$

kde $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- pro $b = 0$ máme $\sum_{n=1}^{\infty} 0$, tedy zjevně konverguje absolutně, tedy konverguje.
- pro $b > 0$ je $b_n > 0$, tedy jde o řadu s kladnými členy. Z d'Alembertova kritéria máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}}}{\frac{b^n}{n+\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} b\frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} b\frac{n}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \overset{AL}{=} b$$

  Tedy pro $b > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Pro $0 < b < 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.
  Pro $b = 1$ aplikujeme LSK s řadou $c_n = \frac{1}{n}$. Protože $b_n, c_n > 0$, můžeme počítat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

  Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, tak z LSK i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.
- pro $b < 0$ máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |b|^n}{n+\sqrt{n}}$$

  Absolutní konvergence - převedení na předchozí případ.
  Tedy pro $b \in (-1, 0)$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje absolutně, tedy i konverguje.
  Pro $b < -1$ řada nekonverguje absolutně. Vyšetříme nutnou podmínku.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n |b|^n}{n+\sqrt{n}}.$$

  Prve spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b|^n}{n+\sqrt{n}}.$$

Použijme Heineho větu, $x_n = n$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$. Pak počítáme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b^x}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\log|b|}}{x+\sqrt{x}} \overset{L'H}{\underset{\text{něco}/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x\log|b|}\log|b|}{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}} \overset{AL}{=} \infty$$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b|^n}{n+\sqrt{n}} \overset{AL}{=} \infty \neq 0$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n|b|^n}{n+\sqrt{n}} \nexists,$$

protože z věty o limitě vybrané posloupnosti plyne, že pro sudé členy je limita rovna ∞ a pro liché $-\infty$.
Tedy řada nesplňuje nutnou podmínku a diverguje.
Zbývá případ $b = -1$. Tedy vyšetřujeme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

Tato řada konverguje z Leibnizova kritéria: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$ a posloupnost $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ je zjevně nerostoucí.

- Závěr:
  i. pro $b \in [0, 1)$, tedy pro $a \in [0, \tan 1)$ řada konverguje absolutně, tedy konverguje.
  ii. pro $b \in [1, \frac{\pi}{2})$, tedy pro $a \in [\tan 1, \infty)$ řada diverguje.
  iii. pro $b \in (-1, 0)$, tedy pro $a \in (-\tan 1, 0)$ řada konverguje absolutně, tedy konverguje.
  iv. pro $b = -1$, tedy pro $a = -\tan 1$ řada konverguje neabsolutně.
  v. pro $b < -1$, tedy pro $a \in (-\infty, -\tan 1)$ řada diverguje.

2. Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad. (Není-li napsáno jen NAK.)

   (a) NAK $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\ln \frac{n+3}{n+1}\right)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

   (d) NAK $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) n \sin 2n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2} + \binom{n}{3}}{\binom{n}{4} + \binom{n}{5}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n + 1} \sin(n\sqrt{\pi})$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2} - \sqrt[3]{n^{3/4}+1}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$

2a

Příklad 2 :

- Nejprve upravíme:

$$\cos(3n+2) = \cos 3n \cos 2 - \sin 3n \sin 2.$$

Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Proto mají řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 3n$ omezené částečné součty.

- Posloupnost $\left\{\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je pro všechna $n > 2$ klesající (jak lze ověřit například derivováním funkce $\frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$), proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$, a tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2) =$$

$$= \cos 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n - \sin 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$$

konverguje, neboť je lineární kombinací konvergentních řad.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro kosinus .... 5 bodů
- omezenost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(3n)$ resp. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3n)$ .... 2 body
- $\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ jde monotónně k nule .... 5 bodů
- použití (zmínění) Dirichletova kritéria .... 2 body
- lineární kombinace konvergentních řad je konvergentní řada .... 1 bod

---

2b

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n,$$
kde $\log x$ ($= \ln x$) je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení : Položme
$$a_n := \frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n.$$
Protože $\frac{n+3}{n+1} > 1$, je $a_n > 0$. Použijeme odmocninové kritérium:
$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=:b_n}\ \underbrace{\log\frac{n+3}{n+1}}_{=:c_n}.$$
Platí
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\log\frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\log\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \log 1 = 0\,,$$
kde jsme využili faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé n přirozené platí $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$, tedy i
$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1\,,$$
odkud plyne, že posloupnost b_n je omezená[2]. Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0\,,$$
což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

Poznámka: Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená n platí
$$0 < \frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n < \left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n,$$
nebo že platí
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n}{\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n} = 1\,.$$
Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- aplikace odmocninového kritéria .... 3 body
- $a_n > 0$, aritmetika limit .... 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu .... 4 bodů
- výpočet limity n-té odmocniny .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) .... 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[2] Samozřejmě je také možno spočítat limitu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ například rozpisem obecné mocniny na exponencielu a logaritmus, a obdržíme také $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0$.

2c

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^{4/3}}$. Čtenáři je tak v této chvíli dána možnost přijít na to, proč zrovna tato mocnina n je ta pravá... Pokud se necháte poddat, tak vězte, že pro velká n se

$$\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{1}{n},$$

zatímco (stále pro velká n) se

$$\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \tag{2}$$

Nyní je potřeba tyto naše odhady matematicky přesně odůvodnit. Počítejme tedy, a nezapomeňme ani na odůvodnění výpočtu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}}_{=:A_n} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{=:B_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Protože $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, dostali jsme $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{2\sqrt{2}}$. Použili jsme větu o aritmetice limit, Heineovu větu a spojitost odmocniny. Pro posloupnost B_n platí (průběh a výsledek tohoto výpočtu je přesně to, co stojí za „odhadem“ v (2)):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Rovnost v $(\star)$ plyne ze základní limity $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ a Heineovy věty použité na posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$, která sestává z nenulových členů a konverguje k 0. Tím je odůvodněn výpočet (3).

Protože limita v (3) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 body
- číselný výpočet limity v (3) .... 6 bodů
- závěr, že řada konverguje .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- Heineho věta .... 1 bod
- limita složené funkce .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (3)
LS 2008-09, 10. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \qquad y \to 0,\\
\sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,\\
\cos x \cdot \cos x^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,\\
\sqrt{1+x^2} - \cos x \cdot \cos x^2 - x^2 &= \frac{1}{3}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{3}x^4.$$

Pokud jde o jmenovatele, tak dostáváme

$$\begin{aligned}
\sqrt{e^{x^2}} &= \sqrt{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)}\\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)\right)^3 + o(x^6)\\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.
\end{aligned}$$

Pak platí

$$\sqrt{e^{x^2}} - \cos(x) - x^2 = \frac{1}{12}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{\exp(x^2)} - \cos(x) - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)} = 4.$$

2d

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbf{R}$, proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$ má omezené částečné součty.
- Platí

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) x &= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \lim_{y \to 0+} \left(1 - \frac{\log(1+y)}{y}\right) = 0,
\end{aligned}$$

2d

tedy i

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) n = 0$$

podle Heineho věty.

- Označíme $f(x) := 1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, potom

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - (\log(x+1) - \log x)\,.$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x \in (0,\infty)$ existuje $\xi_x \in (0,1)$ takové, že

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+\xi_x} < 0 \qquad \text{pro všechna } x > 0.$$

Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0,\infty)$, a proto je i posloupnost $a_n = f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x) = \frac{1}{x(1+x)^2}, \qquad x \in (0,\infty).$$

Funkce f' je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0,\infty)$, a tedy f je na $(0,\infty)$ klesající.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1} = t$, tj. $x = \frac{1}{2}(t^2-1)$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$I := \int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2}\,.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme

$$\int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{12}{(t^2+3)^2}\right)\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I = \left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{2t}{t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = \frac{\log^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro $x \in (0,\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0,\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x) = \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2} = x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0,1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = \pi^{-3} \in (0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria

2e

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^2}$. Pro velká n se totiž

$$a_n := \frac{n!+1}{(n+2)!+2} \quad \text{„chová jako"} \quad \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \quad \text{což se „chová jako"} \quad \frac{1}{n^2} =: b_n\,.$$

Nyní je potřeba tento náš odhad odůvodnit. Počítejme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!+1)\,n^2}{(n+2)!+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n!}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2\cdot n!}} = 1\,, \tag{1}$$

s využitím faktu, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!} = 0$ a podle věty o aritmetice limit.

Protože limita v (1) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 bodů
- číselný výpočet limity v (1) .... 5 bodů
- závěr .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ apod. .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

2 ℓ

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}},$$

kde $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo „n nad k“. (15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}.$$

Úpravou čitatele i jmenovatele tohoto zlomku použitím vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ dostaneme

$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60+20(n-2)}{5(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots-2)$, $(\cdots-3)$ ve výrazech výše,

$$a_n \text{ se tedy „chová jako“ } \frac{1}{n^2}.$$

Označme tedy $b_n := \frac{1}{n^2}$. Lze ihned konstatovat, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{20n^2}{(n-2)(n-3)} = \frac{20}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}.$$

Odtud ihned dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 20, \tag{7}$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mají nezáporné členy, limita v (7) je vlastní a nenulová, plyne tedy z (6) podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n .... 4 body
- určení b_n a spočtení (7) .... 5 bodů
- odůvodnění: zmínka, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod
- odůvodnění: zmínka, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: (7) je vlastní a nenulová .... 2 body
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

2g

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi}) .$$

(15 bodů)

Řešení : Využijeme znalost, že posloupnost (částečných součtů) $\sum_{n=1}^{N} \sin nx$ je pro pevné $x \in \mathbf{R}$ omezená – tedy že pro dané $x \in \mathbf{R}$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $N \in \mathbf{N}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin nx \right| < K .$$

Pro $x = \sqrt{\pi}$ tedy dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\sqrt{\pi})$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Pro ověření konvergence řady použijeme Dirichletovo kritérium, tedy bude stačit, pokud ukážeme, že

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} = 0 ,$

(ii) $\displaystyle \frac{n^{10}}{2^n+1}$ je monotónní posloupnost, alespoň od jistého indexu n_0.

Ad (i): Výpočet uvedené limity není obtížný, snadno ji spočtete některou z metod 1. semestru.

Ad (ii): označme $a_n := \frac{n^{10}}{2^n+1} > 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot (2^n+1)}{n^{10} \cdot (2^{n+1}+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 , \tag{1}$$

tedy jistě existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$, tedy $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$.

Jiný způsob, jak zjistit monotonii, je zkoumat znaménko derivace pomocné funkce

$$f(x) = \frac{x^{10}}{2^x+1} , \qquad \text{tj.} \qquad f'(x) = \frac{x^9 2^x}{(2^x+1)^2} \left[10 + \frac{10}{2^x} - x \log 2 \right] , \qquad x \in \mathbf{R} .$$

Protože výraz v hranatých závorkách jde k mínus nekonečnu pro $x \to +\infty$, existuje určitě takové $x_0 \in \mathbf{R}$, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x > x_0$. Funkce f tedy klesá na intervalu $(x_0, +\infty)$, proto $a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n > x_0$.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka : Tento postup ukazuje, jak asi pracovat (zdůvodňovat) v případě použití Abel-Dirichletova kritéria. Pro tuto konkrétní řadu však existovalo mnohem jednodušší řešení: protože

$$\left| \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi}) \right| \leq \frac{n^{10}}{2^n+1} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N} ,$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1}$ konverguje dle podílového kritéria – viz (1), konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi})$ absolutně, a tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- zdůvodnění omezenosti částečných součtů .... 2 body
- výpočet limity .... 4 body
- ověření monotonie .... 6 bodů
- aplikace kritéria a závěr .... 3 body

2b

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$

(15 bodů)

Řešení :

Položme

$$a_n := \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$

Rozšířením čitatele i jmenovatele tohoto zlomku dvojím použitím vzorce $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ (například pro úpravu čitatele klademe $A = \sqrt[3]{n^3+1}$, $B = n$) dostaneme

$$a_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} \cdot \frac{(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}}{1}.$$

Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si", že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots + 2)$ a $(\cdots + 1)$ ve výrazech výše, a_n se tedy „chová jako"

$$b_n := \frac{n^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Mimo jiné je nyní vidět, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$

podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně", je ale nutné přesně ověřit:

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\left[(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}} + (n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}\right] \cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}} + n(n^3+1)^{\frac{1}{3}} + n^2} = \\ &= \frac{\left[\left(1+\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1+\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{3}{2}}}{\left[(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}} + (1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} + 1\right] \cdot n^2}.\end{aligned}$$

Po vykrácení tohoto zlomku výrazem n^2 tedy dostaneme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{7}$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady mají nezáporné členy, takže z (7) a z (6) plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n (rozšíření zlomku) .... 4 body
- určení b_n .... 4 body
- ověření (7) .... 4 body
- odůvodnění .... 3 body

2i

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2},$$

kde symbolem log značíme přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e. (15 bodů)

Řešení : Položíme $a_n := \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$. Protože platí $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = 1$, je určitě $a_n \geq 0$ pro všechna dostatečně velká přirozená[1] n, a můžeme proto použít (limitní) odmocninové kritérium.

Platí:

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n} = e^{n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)} =: e^{A_n}.$$

Dále je

$$A_n = n\log\left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \underbrace{n}_{P_n} \cdot \underbrace{\frac{\log\left(1-\log\frac{n+1}{n}\right)}{-\log\frac{n+1}{n}}}_{Q_n} \cdot \underbrace{\frac{-\log\frac{n+1}{n}}{-\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}}_{R_n} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{n+1}{n}\right)}_{S_n}.$$

Všimněte si, jakých úprav používáme, abychom co nejvíce při výpočtu $\lim_{n\to\infty} A_n$ využili základních limit pro logaritmus. Dále už je výpočet jednoduchý, i když jeho správné odůvodnění v sobě skýtá jisté možnosti nečekaných bodových ztrát:

$$\lim_{n\to\infty} P_n \cdot S_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = 1 \quad \text{(základní limita pro logaritmus a využití Heineho věty s } y_n = -\log\frac{n+1}{n}\text{)},$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 1 \qquad \text{(obdobné odůvodnění jako pro } Q_n\text{)}.$$

Celkově tedy je podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} A_n = -1, \qquad \text{a proto} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Protože $1/e < 1$, plyne z limitního odmocninového kritéria, že námi vyšetřovaná řada konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- $a_n \geq 0$ .... 2 body
- výpočet Q_n .... 4 body
- výpočet R_n .... 3 body
- $\lim_{n\to\infty} A_n = -1$ .... 2 body
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$ .... 1 bod
- závěr, že řada konverguje dle odm. kritéria .... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění limity složené funkce .... 2 body
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[1] Dá se dokonce jednoduše spočíst, že $\left(1 - \log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \geq 0$ a tedy i $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená n, není to však nutné: odmocninové kritérium potřebuje pouze, aby existovalo přirozené n_0, že $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená $n \geq n_0$.

2j

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right).$$
(15 bodů)

Řešení : Položme
$$x_n := \frac{1+2^n}{3^n}, \qquad y_n := \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}. \tag{6}$$
Není těžké odhadnout, že x_n „se chová pro velká n jako“ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, a také, že $y_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$ „se chová pro velká n jako“ $\frac{1}{n^{1/4+1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$.

Přesněji, pro x_n máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+1\right) = 1, \tag{7}$$
zatímco pro y_n máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{n^{1/4+1/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$
Ve výpočtech používáme věty o aritmetice limit, skutečnosti, že $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ a $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje (buď podle odmocninového kritéria nebo konstatováním faktu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{2}{3}$), dále pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje (s využitím znalosti, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ konveguje právě tehdy, když $\gamma > 1$), a konečně protože členy všech čtyř řad v (7), (8) jsou nezáporné, dostaneme dvojím použitím limitního srovnávacího kritéria, že
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n} \text{ konverguje, zatímco } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \text{ diverguje.}$$
První možnost zakončení: Z výše uvedeného již plyne, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right) \text{ diverguje,}$$
neboť kdyby tato řada konvergovala, musela by (protože rozdíl dvou konvergenvních řad je konvergentní řada) konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)-\left(\frac{1+2^n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$, což není pravda.

Druhá možnost zakončení: Pro všechna přirozená n platí $\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} > \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$ diverguje, diverguje podle srovnávacího kritéria i řada, kterou jsme měli vyšetřit.

Bodování při použití prvního postupu při výpočtu (při druhém budou body přerozděleny):

- konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .... 5 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .... 6 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ .... 4 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje a proč .... 1+1 bod
- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje a proč .... 1+1 bod
- odůvodnění: zmínky, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta}}=0$ pro $\beta>0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: limity (7), (8) jsou vlastní a nenulové ..... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: jde o řady s nezápornými členy .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.