5. cvičení – Řady - Směs

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Fakta

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Algoritmus:

1. Mrkneme, jestli řada splňuje **nutnou podmínku**.
2. Vyšetříme **absolutní konvergenci** $\sum |a_n|$.

   (a) SK, LSK, (b) Cauchy, d'Alembert.

   Pokud řada **nestřídá znaménka**, jsme hotovi, protože absolutní a neabsolutní konvergence splývá.
3. Pokud řada **střídá znaménka**, ale $\sum |a_n|$ **konverguje**, tak konverguje i $\sum a_n$.
4. Konečně pokud řada **střídá znaménka**, ale $\sum |a_n|$ **diverguje**, vyšetříme ještě $\sum a_n$.

   (a) Leibniz, (b) Dirichlet, (c) Abel.

5. Napíšeme **závěr**.

Příklady

Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad.

1. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n^a}$
      i. pro $a=2$,
      ii. v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{3^n+1} - \sqrt[3]{3^n-1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{(n^2)}}$
      i. pro $a=2$,
      ii. v závislosti na parametru $a > 0$.

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+\sqrt[5]{n}} - \sqrt[3]{n-\sqrt[4]{n}}}{\sqrt{n}}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan a)^n}{n+\sqrt{n}}$,
      i. pro $a=1$,
      ii. v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$.

Následující příklady i s řešením jsou od doc. Rokyty: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html

2. Vyšetřete **absolutní** i **neabsolutní** konvergenci řad. (Není-li napsáno jen NAK.)

   (a)✿ NAK $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\ln \frac{n+3}{n+1} \right)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

   (d)❄ NAK $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \right) n \sin 2n$

   (e)✤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}$

   (f)★ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}$

   (g)❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi})$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}$

   (i)♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right)^{n^2}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2^n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \right)$

(2a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
(2d) Dirichlet, monotonii ukážeme přes derivaci - její nulový bod nehledáme - prozkoumáme druhou derivaci a $\lim_{x\to\infty} f'$.
(2e) LSK s $\frac{1}{n^2}$
(2f) rozepište kombinační čísla, pak LSK s $\frac{1}{n^2}$
(2g) Dirichlet, monotonie: zkoumejte $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
(2g) Cauchy