4. cvičení – Řady - Neabsolutní konvergence

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. (a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$
Řešení: Otestujeme limitu
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0.$$
Je vidět, že posloupnost je nerostoucí, tedy z Leibnize řada konverguje,

(b)
$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\log k}$$
Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\log k}\xrightarrow{k\to\infty}0$. Posloupnost $\frac{1}{\log k}$ je zjevně nerostoucí.

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$
Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}=\frac{2}{3}\neq 0,$$
tedy řada diverguje.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$

Řešení: Označme $b_n=\frac{n}{n^2+2}$. Zjevně je $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2}=0$. Abychom ukázali monotónnost, uvažujme funkci $f(x)=\frac{x}{x^2+2}$. Její derivace je:
$$f'(x)=\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}.$$
Tedy platí, že $f'(x)<0$ pro $x>\sqrt{2}$. Odtud máme, že posloupnost b_n je klesající pro $n\geq 2$.
Řada pak konverguje z Leibnizova kritéria.

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{arccot}(n)$

Řešení: Položme $a_n=\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ a $b_n=\operatorname{arccot} n$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ má omezené částečné součty. Posloupnost b_n je monotónní - nerostoucí a navíc $\lim_{n\to\infty}b_n=0$.
Z Dirichletova kritéria pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{arccot}(n)$ konverguje.

(b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k}{\log k}$$

Řešení: Řada konverguje z Dirichletova kritéria, neboť $\cos(2k)$ má omezené částečné součty, $1/\log k \to 0$ a navíc je $1/\log k$ nerostoucí.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}$

Řešení:

Posloupnost $\sin n$ má omezené částečné součty. Posloupnost $\frac{1}{n}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tedy z Dirichleta konverguje řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Posloupnost $\arctan n$ je monotónní a omezená, tedy z Abela konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}$.

Detailněji: posloupnost arctan je rostoucí a omezená $0 < \arctan n < \frac{\pi}{2}$. Abychom získali posloupnost nerostoucí a nezápornou, rozepišme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{-\arctan n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan n}{n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{-\frac{\pi}{2}}{n} + \sin(n) \frac{+\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n} \\
&\stackrel{?}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{-\frac{\pi}{2}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{+\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n}
\end{aligned}$$

Pokud ukážeme, že obě řady konvergují, bude konvergovat i jejich součet.

První řada konverguje z Dirichleta (už jsme ukázali). Druhá řada: z Dirichleta konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$. Posloupnost $\frac{\pi}{2} - \arctan n$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan n = 0$. Tedy z Abela konverguje i řada

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{+\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n}.$$

Závěr: z linearity řad konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \frac{\arctan n}{n}.$$

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

Řešení:

Z Leibnizova kritéria: posloupnost $b_n = \frac{n}{n^2+1}$ je zjevně nezáporná,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

a je nerostoucí:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq a_{n+1} \\
\frac{n}{n^2+1} &\geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} \\
n^3+2n^2+n &\geq n^3+n+n^2+1 \\
n^2 &\geq 1
\end{aligned}$$

Tedy z Leibnizova kritéria řada konverguje.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$

Řešení: Posloupnost $\sin n$ má omezené částečné součty.

Dále máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} = 0.$$

Ukážeme, že posloupnost je nerostoucí, tedy že $a_n \geq a_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
a_n &\geq a_{n+1} \\
\frac{n+1}{n^2+n+10} &\geq \frac{n+1+1}{(n+1)^2+n+1+10} \\
(n+1)(n^2+3n+12) &\geq (n+2)(n^2+n+10) \\
n^3+4n^2+15n+12 &\geq n^3+3n^2+12n+20 \\
n^2+3n &\geq 8 \\
n(n+3) &\geq 8
\end{aligned}$$

Zřejmě platí pro $n \geq 2$.

Tedy daná posloupnost je nerostoucí od $n \geq 2$. Tedy z Dirichletova kritéria konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10} \sin n$.

(f) Užijte faktu $2\sin^2 k = 1 - \cos 2k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$$

Řešení: Pomocí faktu výše píšeme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{k}.$$

První řada diverguje, druhá konverguje z Dirichleta (a faktů). Tedy součet vpravo je dobře definován a řada diverguje.

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$

Řešení:

Ze součtových vzorců máme

$$\sin\left(n+\frac{1}{n}\right) = \sin n \cos\frac{1}{n} + \cos n \sin\frac{1}{n}.$$

Řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\log(\log n)}$ pak konverguje z Dirichletova kritéria, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezené částečné součty a $\frac{1}{\log(\log n)}$ jde monotónně k 0.

Protože $\cos\frac{1}{n}$ je omezená $|\cos\frac{1}{n}| \leq 1$ a jde monotónně do 1 (plyne např. z náčrtku funkce $\cos x$), tak konverguje z Abela i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos\frac{1}{n}}{\log(\log n)}$.

Analogicky se ukáže, že konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin\frac{1}{n}}{\log(\log n)}$.

A protože součet dvou konvergentních řad je konvergentní, konverguje i původní řada $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Řešení:

Neboť $\sin\frac{1}{n}$ jde monotónně do 0 (jde vidět z grafu), tak řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$ konverguje z Leibnize.

Jelikož pak $\frac{n}{n+1}$ je omezená a rostoucí (možno ukázat derivací), tak z Abela konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

Řešení: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+10}{3k+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}|\,|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|z|^n}{n}} = \lim \frac{|z|}{1} \frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová.

Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.

Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$$

Řešení: Platí, že (pro $k \geq 4$)

$$\left|(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}\right| = \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3} = \frac{1}{k^2}\frac{2+3/k+4/k^2}{2+3/k^4} \leq \frac{1}{k^2}\frac{2+1+1}{2} = \frac{2}{k^2}.$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$$

Řešení: Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9}-\sqrt{k} = \frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}} \geq \frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

(e)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$

Řešení:
Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.
Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2k+1 \leq 2(k+1)-1, \quad 2k-1 \leq 2(k+1)+1 \implies \frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2(k+1)+(-1)^{k+1}}$$

jsou pravdivé.

4.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin k}{k^2+1}$$

Řešení:

Upravíme nyní člen řady na tvar

$$(-1)^k \frac{k\sin k}{k^2+1} = (-1)^k \frac{\sin k}{k}\cdot\frac{k^2}{k^2+1}.$$

Dokážeme-li nyní konvergenci řady $\sum_k (-1)^k \frac{\sin k}{k}$, pak, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\frac{k^2}{k^2+1}\}$ je evidentně omezená (má limitu) a monotónní, z Abelova kritéria bude vyplývat také neabsolutní konvergence vyšetřované řady.

Nyní použijeme **triku** rozdělení řady na dvě, na řadu sudých a lichých členů.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin k}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\dots} (-1)^k \frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\dots} (-1)^k \frac{\sin k}{k}$$

což po úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin k}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\dots} -\frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\sin k}{k}$$

Z následující poznámky plyne, že pokud dokážeme konvergenci řad na pravé straně, pak konverguje také řada na straně levé a rovnost s otazníkem platí.

Avšak konvergence obou řad na pravé straně plyne z Dirichletova kritéria. Protože $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně, stačí ověřit stejnou omezenost částečných součtů řad $\sum_k \sin k$ sčítaných přes sudé a liché členy.

Řada $\sum_k \sin kx$ má totiž omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položením $x = 2$ tedy zjišťujeme, že řada $\sum_k \sin(2k) = \sum_{k=2,4,\dots} \sin k$ má omezené částečné součty. A protože

$$\left|\sum_{k=1,3,5,\dots}^{N} \sin k\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \sin k - \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\right| + \left|\sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k\right|$$

a obě řady napravo mají stejně omezené částečné součty, plyne odtud stejná omezenost částečných součtů i pro řadu lichých členů.

Tím je neabsolutní konvergence vyšetřované řady dokázána.

Bonus

5. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (K), $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (D). (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K Nepravda.
   Pro spor předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní. Pak z linearity máme i konvergenci řady
   $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + c_n) - a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$
   což je spor.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D Nepravda, např. $c_n = n$, $d_n = -n$.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ K Pravda, plyne z věty o linearitě.
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, $k, l \in \mathbb{R}$, K Pravda, plyne z věty o linearitě.
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K Nepravda, např. $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K Nepravda, např. $c_n = d_n = n$.
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K Nepravda, např. $b_n = \frac{1}{n^2}$, $d_n = n^3$.