4. cvičení – Řady - Neabsolutní konvergence

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leibniz). Nechť $\{b_n\}$ je **nerostoucí a nezáporná** posloupnost. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta 2 (Abelovo-Dirichletovo kritérium). Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **nerostoucí a nezáporná**. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:

(A) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**,

(D) $\lim b_n = 0$ a **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **omezená**.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Poznámka 3. Kritéria se vyskytují i v jiných verzích:

- Leibniz
  Nechť $\{b_n\}$ je **monotónní** posloupnost, která konverguje k 0. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ konverguje.
- Abelovo-Dirichletovo kritérium
  Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť je navíc splněna alespoň jedna z následujících dvou podmínek:
  (A) posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**,
  (D) $\lim b_n = 0$ a **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **omezená**.
  Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.
- Abelovo kritérium 2
  Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je **monotónní**. Nechť navíc posloupnost $\{b_n\}$ je **omezená** a $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Fakta

První fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$

sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale mají stejně omezené částečné součty pro:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Druhý fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

Hinty

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$2\sin^2 k = 1 - \cos 2k, \qquad 2\cos^2 k = 1 + \cos 2k$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Poznámka 4. Algoritmus:

1. Rychle zkoukneme, jestli řada splňuje **nutnou podmínku**.
2. Odhadneme, jestli by nemohla být **absolutně konvergentní**. Pokud ano, testujeme $\sum |a_n|$ kritérii pro nezáporné řady. Neabsolutní konvergence pak vyplyne.
3. Na AK to nevypadá, tedy:
   (a) Je to $(-1)^n b_n$, kde b_n jde k 0 monotónně? $\to$ **Leibniz**. **Monotonii** poctivě ověříme:
      i. Jak vypadá $b_{n+1} - b_n$ nebo b_{n+1}/b_n?
      ii. Převedeme b_n na funkci a zderivujeme - zjistíme, kde roste a klesá.
   (b) Je tam $\sin nx$ nebo $\cos nx$ krát b_n, která jde **monotónně** k 0? Dirichlet. Poctivě ověříme monotonii (jako u Leibnize).
   (c) Je tam konvergující řada krát něco **omezeného**? Zkusíme Abela. Opět ověříme **monotonii**.
4. Kritéria jde i **kombinovat**. Je tam $\sin nx$ krát něco jdoucí k 0 krát něco omezeného? Dirichlet a pak slepit Abelem. A pořád ověřujeme podmínky.
5. **Varování**: Víme, že $\sum \sin(nx)$ a $\sum \cos(nx)$ má omezené částečné součty. O výrazech $\sin^2 n$, $\cos(n+2)$ nebo $\sin n^2$ nevíme nic a musíme je prve upravit.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 2}$

2. Určete, zda následující řady konvergují.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{arccot}(n)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\log n}$

(c)❋ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n)\frac{\arctan n}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+n+10}\sin n$

(f)❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$

(g)✻ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Rozhodněte o **neabsolutní i absolutní konvergenci** následujících řad (v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+10}{3n+1}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$

(d)✤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2\pi)\left(\sqrt{n+9}-\sqrt{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

4.❁ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\sin n}{n^2+1}$

Bonus

5. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní (K), $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní (D). (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ K

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n,\ k, l \in \mathbb{R}$, K

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K

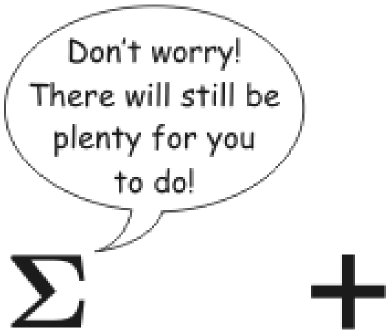

Figure 1: https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2010/09/09/a-nice-and-funny-note/

(2c) $\arctan n = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} n$
(2f) $2\sin^2 k = 1 - \cos 2k$
(2g) Užijte součtové vzorce pro $\sin(a+b)$ (2h) Vyřešte prve $\sum(-1)^n \sin\frac{1}{n}$
(3d) Rozepište prvních pár členů $\cos(k^2\pi)$.
(4) Rozepište na $\frac{\sin k}{k} \cdot \frac{k^2}{k^2+1}$, použijte Abela. Ke konvergenci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ užijte Dirichleta a roztržení na sudé a liché členy.