3. cvičení – Řady - řady + Taylor

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$

   Řešení:

   Položme $a_n = \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

   Položme funkci $f(x) = \sin x - \arcsin x$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

   Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\
f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\\
&= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

   Nejsilnější člen je tedy x^3.

   Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

   Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n^3}}$$

   Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

   Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

   Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{3}.$$

   Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{3}.$$

   Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$

Řešení:

Položme $a_n = 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n^{1/5}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = 2(\tan x - \sin x) - x^3$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$
\begin{aligned}
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0 \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0 \\
f(x) &= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\right) - x^3 \\
&= \frac{1}{4}x^5 + o(x^6), \quad x \to 0.
\end{aligned}
$$

Nejsilnější člen je tedy x^5.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)^5 = \frac{1}{n}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}\right|}{\frac{1}{n}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}}{\frac{1}{n}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n^{1/5}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{4}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, tak je divergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = \sin(x - \arcsin x)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0 \\ \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0 \\ x - \arcsin x &= -\frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0 \\ f(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^3}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)$, $\beta > 0$

Řešení:

Položme $a_n = \ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n^\beta}$. . Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \ln x - \ln(\sin x) = \ln \frac{x}{\sin x} = -\ln \frac{\sin x}{x}$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0 \\
\frac{1}{x}\sin x &= 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3), \quad x \to 0 \\
f(x) &= \frac{1}{6}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n^\beta}\right)^2 = \frac{1}{n^{2\beta}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)\right|}{\frac{1}{n^{2\beta}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^{2\beta}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n^\beta}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin \frac{1}{n^\beta}\right)}{\frac{1}{n^{2\beta}}} = \frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $\beta > \frac{1}{2}$, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní právě tehdy, když $\beta > \frac{1}{2}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Řešení:
Položme $a_n = \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^\alpha}$, dále položme $c_n = \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sin x - x$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0\\ f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x\\ &= -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{3+\alpha}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}\right|}{\frac{1}{n^{3+\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^3}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^\infty b_n$. Protože $\sum_{n=1}^\infty b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > -2$, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ právě pro $\alpha > -2$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

Řešení: Položme $a_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)$.
Dále položme $c_n \sqrt{1+\frac{2}{n}} - 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1$. Uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = \sqrt{1+2x} - 2\sqrt{1+x} + 1$. Pak platí $f(x_n) = c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x} &= 1+\frac{1}{2}(2x)-\frac{1}{8}(2x)^2+o(x^2), \quad x\to 0\\ \sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2), \quad x\to 0\\ f(x) &= -\frac{1}{4}x^2+o(x^2), \quad x\to 0.\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.

Použijeme tedy LSK s $b_n=\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^{3/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\right|}{\frac{1}{n^{3/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n=\frac{1}{n}$, $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{4}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\frac{1}{4}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$, $p\in\mathbb{R}$

Řešení:

Položme $a_n=\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ a $c_n=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dále uvažujme posloupnost $x_n=\frac{1}{n}$. Zřejmě $x_n\to 0$.

Položme funkci $f(x)=e\left(1-e^{\frac{1}{x}\log(1+x)-1}\right)$. Pak platí $f(x_n)=c_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$
\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0 \\
\frac{1}{x}\log(1+x) &= 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0 \\
e^{\frac{1}{x}\log(1+x)-1} &= 1 - \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0 \\
f(x) &= e\frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0
\end{aligned}
$$

Nejsilnější člen je tedy x.
Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^p$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.
Počítáme tedy limitu

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p\right|}{\frac{1}{n^p}}
$$

Prve spočteme limitu

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)}{\frac{1}{n}}
$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$
\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{ex}{2}}{x} = -\frac{e}{2}.
$$

Dále z VOLSF

$$
\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|^p}{x} = \frac{e^p}{2^p}.
$$

Tedy platí i

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{e^p}{2^p}.
$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Navíc $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$. Tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní právě tehdy, když $p > 1$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Řešení:
Položme $a_n = \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.
Položme funkci $f(x) = (e^{x^2} - 1 - x^2)(\arcsin x^2 - x)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.
Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 - x^2\right)\left(x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - x\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.
\end{aligned}
$$

Nejsilnější člen je tedy x^5.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 = \frac{1}{n^{5/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n^5}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^5 + o(x^5)}{x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{5/2}}} = -\frac{1}{2}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$ Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$.
Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = \sin x^3 - \log(1 + x^2)$. Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^3 + o(x^3)\right) - \left(x^2 + o(x^2)\right) \\ &= -x^2 + o(x^2), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^2.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right|}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = -1.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = 1.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentní, tak je divergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Řešení:

Položme $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Dále uvažujme posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Zřejmě $x_n \to 0$.

Položme funkci $f(x) = x + \log(\sqrt{1 + x^2} - x)$ Pak platí $f(x_n) = a_n$.

Rozvineme $f(x)$ do Taylora v 0:

$$\begin{aligned}
-x + \sqrt{1 + x^2} &= -x + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad x \to 0 \\
x + \log(-x + \sqrt{1 + x^2}) &= x + (-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)) - \frac{1}{2}(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}(-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)) + o((-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))^3) \\
&= \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.
\end{aligned}$$

Nejsilnější člen je tedy x^3.

Použijeme tedy LSK s $b_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 = \frac{1}{n^{3/2}}$ a budeme vyšetřovat absolutní konvergenci.

Počítáme tedy limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Prve spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}}$$

Aplikujeme Heineho, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potřebujeme tedy spočítat limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Odtud i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{6}.$$

Z větičky o limitě a absolutní hodně pak platí i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \frac{1}{6}.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, tak je konvergentní i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

2. Vyšetřete konvergenci řad.

   Příklady i s řešením jsou odsud: https://is.muni.cz/th/z861p/Nekonecne_rady_v_komplexnim_oboru.pdf

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i(-1)^n}{n^2}$

   Řešení: Budeme uvažovat zvlášť řady $\sum \frac{1}{n^2}$ a $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$. Víme, že obě konvergují (dokonce absolutně).

   Tedy z poznámky 2. plyne, že konverguje i původní řada.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}$

   Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci a aplikujeme d'Alembertovo podílové kritérium. Tedy uvažujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{n(1+i)^n}{3^n}\right|$$

   Podílové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)(1+i)^{n+1}}{3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n(1+i)^n}{3^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot |1+i| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$$

   Řada tedy konverguje absolutně, tedy konverguje.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $a \in \mathbb{C}$

Řešení: Vyšetříme absolutní konvergenci a aplikujeme Cauchyho odmocninové kritérium. Tedy uvažujeme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a^n|$$

Odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n} = |a|$$

Tedy pro $|a| < 1$ daná řada konverguje absolutně, tedy konverguje.

Pro $|a| \geq 1$ řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

3. Dokažte, nebo najděte protipříklad.

(a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.
Řešení: Nechť $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (částečný součet první řady) a $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$ (částečný součet druhé řady). Potom platí, že $\sigma_n = s_{2n}$, a tedy posloupnost částečných součtů druhé řady tvoří podposloupnost částečných součtů řady první. A protože libovolná podposloupnost konvergentní posloupnosti konverguje (a to ke stejné limitě), je tvrzení pravdivé.

(b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Řešení: Tvrzení není pravdivé. Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$. Potom první řada $\sum a_n$ má vlastně podobu $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ a osciluje, kdežto druhá $\sum(a_{2n-1} + a_{2n})$ má podobu $0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ a je zjevně konvergentní.

(c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
Řešení: Tvrzení není pravdivé. Řada $\sum \frac{1}{n}$ není konvergentní.

(d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.

(e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.
Řešení: Tvrzení jsou zjevně nepravdivá, co třeba řady se zápornými členy $\sum -\frac{1}{n^2}$. Ale i pokud předpokládáme, že $a_n \geq 0$ pro každé přirozené n, přesto najdeme protipříklad. Uvažte posloupnost

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}, \qquad a_{2n+1} = \frac{2}{(2n)^2}.$$

Potom je celkem zřejmé, že $a_{2n+1} \geq a_{2n}$. Přitom řada $\sum a_n$ je konvergentní, neboť $a_{2n} \leq a_{2n+1} \leq \frac{1}{n^2}$ a řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria.