3. cvičení – Řady - řady + Taylor

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost, $A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Algoritmus

Snažíme se uhodnout posloupnost b_n, kterou použijeme do LSK:

1. Najdeme x_n a funkci $f(x)$ tak, že složením $f(x_n)$ dostaneme a_n. (Např. pro $a_n = \sin\frac{1}{n}$ budeme mít $f(x) = \sin x$, $x_n = \frac{1}{n}$.)
2. Zkontrolujeme, že x_n jde do 0.
3. Rozvineme $f(x)$ do Taylora. (Stupeň musíme odhadnout, ale musí tam zbýt nějaká x, nejen óčka.)
4. Proměnnou x v Taylorovi nahradíme zpátky x_n, tím získáme b_n pro LSK.
5. Provedeme LSK. Nezapomeneme použít Heineho, Taylora příp. Větu výše.
6. Uděláme závěr.
7. Varování: některé funkce je potřeba před rozvinutím do Taylora upravit, abychom rozvíjeli v 0.
8. Pozn.: Rozvíjet lze samozřejmě i v jiných bodech. Jen to musíme kontrolovat.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci řad.
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right] - \frac{1}{n^{3/5}}$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}\right)$
   (d) ♡ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n^\beta} - \ln\left(\sin\frac{1}{n^\beta}\right)$, $\beta > 0$
   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   (f) ꕥ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
   (g) ❀ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$, $p \in \mathbb{R}$
   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$
   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Komplexní řady

Teorie

Poznámka 2.
1. Posloupnost **komplexních** čísel $\{x_n = a_n + ib_n\}$ konverguje k číslu $x = a + ib$ právě tehdy, když $a_n \to a$ a zároveň $b_n \to b$.
2. Řada **komplexních** čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + ib_n$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Pokud konvergují, tak navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + ib_n = \sum a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
3. **Obvyklé věty platí;)** Detaily hledejte:
   http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html

Fakta

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Čísla na kružnici o poloměru $r > 0$ lze vyjádřit jako

$$re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Příklady

2. Vyšetřete konvergenci řad.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + i(-1)^n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+i)^n}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $a \in \mathbb{C}$

   Příklady jsme vzali tu, je tam i řešení a další příklady: https://is.muni.cz/th/z861p/Nekonecne_rady_v_komplexnim_oboru.pdf

Teorie

3. Dokažte, nebo najděte protipříklad.
   (a) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$.
   (b) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   (c) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
   (d) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge 1$.
   (e) Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \le a_n$ pro všechna $n \ge n_0$.

(1d) $\ln a - \ln b = \ln a/b = -\ln b/a$.
(1f) $\sqrt{n+2} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{2}{n}}$.
(1g) $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\left(1 - e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}\right)$.