1. zápočtová písemka

Písemka je na 60 minut a můžete používat libovolné písemné materiály, ale nikolik techniku. Hodně štěstí.

1. (10 bodů) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{4^n}$$

2. (10 bodů) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}}$$

3. (10 bodů) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

4. (bonus - 0 bodů)
   Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti kladných čísel takové, že $\lim_{n\to+\infty} a_n/(b_n)^2 = \pi$. Rozhodněte o pravdivosti následujících implikací

   A) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje.
   B) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje $\implies$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n + \cos n}{4^n}}_{a_n \geq 0}$ 1

1 d'AL: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1+\cos(n+1)}{4^{n+1}}}{\frac{n+\cos n}{4^n}} = \lim \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{\cos(n+1)}{n}}{1 + \frac{\cos n}{n}} \overset{AL}{=} \frac{1}{4} \cdot \frac{1+0+0}{1+0}$ 4

1 1

om a mez $\nearrow 0$; $\nearrow 0$ om a mez

$= \frac{1}{4} < 1$

2 tedy $\sum a_n$ K

② $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\log(1 + \frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^2+1}}}_{a_n > 0}$ 1

1 LSK s $b_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{n} = \frac{1}{n^3}$ $\sum b_n$ K 1

1

1 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}}_{\to 1} \cdot \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \overset{AL}{=} 1 \cdot 1 \in (0,\infty)$

1 tedy $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K

Heine $x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ $x_n \neq 0$

2 × 1,5

$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$

Heine $x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ $x_n = 0$

$\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x} = 1$

spojitost

1 závěr: $\sum a_n$ K.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$

1 Leibniz, 1 $b_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}}$

1 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = 0$

$n - \sqrt{n} \geq 0$

1 $\sqrt{n}(\sqrt{n}-1) \geq 0$ ✓

5 monotonie

$f(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2}$

$-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \leq 0$

$1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$

$1 \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x} \geq 1$ pro $x \geq 1$

tedy f je nerost., tedy b_n nerost.

1 tedy z Leibnize $\sum$ K.

(4) $a_n, b_n > 0$

$\lim \frac{a_n}{(b_n)^2} = \pi$

(A) $\sum a_n$ K $\Rightarrow$ $\sum b_n$ K Neplatí, protipříklad: $a_n = \frac{\pi}{n^2}$ $\sum a_n$ K

$b_n = \frac{1}{n^1}$ $\sum \frac{1}{n}$ D

(B) $\sum b_n$ K $\Rightarrow$ $\sum a_n$ K platí

$a_n, b_n > 0$ LSK, $\sum b_n$ K

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n}{b_n^2} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{b_n} = \pi \cdot 0 = 0$ $\to$ $\sum a_n$ K

NP