1. cvičení – Řady - NP, Cauchy, d'Alembert

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (nutná podmínka konvergence řady)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim a_n = 0$.

Věta 2 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **nezápornými** členy.

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

(e) Je-li $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s **kladnými** členy.

(a) Jestliže platí
$$\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$
pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Je-li $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(d) Je-li $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\lim a_n = \infty$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 4. Nechť $\{a_n\}$ je reálná posloupnost, jejíž všechny členy jsou **kladné**. Nechť dále platí, že
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$
Potom platí, že
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Věta 5. Nechť a_n je **kladná** posloupnost. Nechť navíc existuje
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$
Pak existuje i
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Definice 6. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní*, jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Věta 7. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Algoritmus:

1. Zkontrolujeme, že má řada **nezáporné členy**. Jinak vyšetřujeme absolutní konvergenci.
2. Vybereme si **d'Alembertovo** nebo **Cauchyovo** kritérium a spočteme příslušnou limitu.

   (a) Obvykle nezáleží, které kritérium zvolíme. Výjimkou je situace, kdy řada obsahuje nulové členy - pak musíme zvolit Cauchyho. Druhou výjimkou je případ, $\limsup > 1$, který se vyskytuje pouze u Cauchyho.
   (b) Může se stát, že limita neexistuje, pak zkusíme variantu s $\limsup$ či nalezením q.
3. Podle limity (< 1 nebo > 1) uděláme závěr: Konverguje nebo Diverguje.
4. **Varování:** Pokud limita vyjde rovna 1, nevíme nic. Navíc pokud vyšla 1 v odmocninovém kritériu, vyjde 1 i v podílovém a naopak. Bude pak potřeba zvolit nějaké úplně jiné (nejspíš **nutnou podmínku** nebo (limitní) srovnávací).

Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Nechť $\alpha > 0$, pak:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$ 4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$
   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}$
   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}$
   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{7}\right)^n$
   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n+3^n}$
   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$
   (g) ❄ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$
   (h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$
   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n-1}$
   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$
   (k) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$
   (l) ♡ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. Vyšetřete konvergenci, $x \in \mathbb{R}$:
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$

Zkouškové příklady

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n, \qquad z \in \mathbb{R}.$
   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$
   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$
   (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

- (1g) $\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right) \le \frac{2}{3}$.
- (1l) Věta 5 a NP.