13. cvičení – zkouškové příklady

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyjádřete jako součet řady
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1-e^{-x}} \,\mathrm{d}x$$

Řešení:

- Nejprve rozvedeme f do řady. Jelikož pro $x \in (0, 2\pi)$ je $|e^{-x}| < 1$, máme
$$\frac{\sin x}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} \sin x, \qquad x \in (0, 2\pi).$$

- Lebesgueova věta. Ověřujeme
$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |e^{-kx} \sin x| \,\mathrm{d}x$$

Pro $k = 0$:
$$\int_0^{2\pi} |\sin x| \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 2[-\cos x]_0^{\pi} = 4$$

Pro $k > 0$ máme (2x per partes):
$$\begin{aligned}
I_k = \int_0^{2\pi} |e^{-kx} \sin x| \,\mathrm{d}x = I_k &= \int_0^{\pi} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{e^{-kx}}{k} \sin x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{e^{-kx}}{k} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \left[-\frac{e^{-kx}}{k} \sin x\right]_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-kx}}{k} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \int_0^{\pi} \frac{e^{-kx}}{k} \cos x \,\mathrm{d}x - 0 - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-kx}}{k} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{e^{-kx}}{k^2} \cos x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \left[-\frac{e^{-kx}}{k^2} \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{k^2}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{1+k^2}{k^2}\, I_k &= \frac{1}{k^2\, e^{2k\pi}} + \frac{2}{e^{k\pi} k^2} + \frac{1}{k^2},\\
I_k &= \frac{1}{e^{2k\pi}\,(1+k^2)} + \frac{2}{e^{k\pi}(1+k^2)} + \frac{1}{1+k^2}.
\end{aligned}
$$

Máme tedy

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{2k\pi}\,(1+k^2)} + \frac{2}{e^{k\pi}(1+k^2)} + \frac{1}{1+k^2} \le \sum_{k=0}^{\infty} 4 \frac{1}{1+k^2} < \infty
$$

- Prohození a výpočet. Z Lebesgueovy věty Pro $k=0$ je

$$
\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 0.
$$

Pro $k>0$ máme

$$
\begin{aligned}
I_k = \int\limits_0^{2\pi} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{e^{-kx}}{k} \sin x \right]_0^{2\pi} + \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-kx}}{k} \cos x \,\mathrm{d}x\\
&= 0 + \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-kx}}{k} \cos x \,\mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{e^{-kx}}{k^2} \cos x \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2} \int\limits_0^{2\pi} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
\frac{1+k^2}{k^2}\, I_k &= -\frac{1}{k^2\, e^{2k\pi}} + \frac{1}{k^2},\\
I_k &= -\frac{1}{e^{2k\pi}\,(1+k^2)} + \frac{1}{1+k^2}.
\end{aligned}
$$

Závěr:

$$
\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} \sin x \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{e^{2k\pi}\,(1+k^2)} + \frac{1}{1+k^2}.
$$

2. Spočítěte

$$
F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)} \,\mathrm{d}x.
$$

Řešení:

- Pro $a<0$ integrand není definován na množině kladné míry, pro $a=0$ je konstantní nula, tedy $F(0)=0$. Pro $a>0$ konverguje, srovnám s $a/(1+x^2)$ u nuly i nekonečna (u ∞ lze použít odhad $s \ge \log(1+s)$).

- Výpočet: Na dluh prohodíme derivaci a integrál:

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}\,\mathrm{d}x$$

Pro $a \neq 1$ rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{a}{(a-1)(1+ax^2)} - \frac{1}{(a-1)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{(a-1)\sqrt{a}}\left[\arctan(x\sqrt{a})\right]_{x=0}^\infty - \frac{1}{a-1}\left[\arctan x\right]_{x=0}^\infty \\ &= \frac{\pi(\sqrt{a}-1)}{2(a-1)} = \frac{\pi}{2(\sqrt{a}+1)}. \end{aligned}$$

Odtud

$$F(a) = \pi\sqrt{a} - \pi\log(\sqrt{a}+1) + C.$$

Za předpokladu, že $F(a)$ je spojitá v 0, můžeme dosadit

$$0 = F(0) = \pi\sqrt{0} - \pi\log(\sqrt{0}+1) + C.$$

Tedy $C = 0$ a

$$F(a) = \pi\sqrt{a} - \pi\log(\sqrt{a}+1) \qquad a \in [0,\infty)\setminus\{a\}.$$

Pokud ukážeme, že F je spojitá v 1, můžeme psát

$$F(a) = \pi\sqrt{a} - \pi\log(\sqrt{a}+1) \qquad a \in [0,\infty).$$

- Předpoklady užitých vět. Věta o derivaci podle parametru:
  - $a \in I = (0,\infty)$, $x \in (0,\infty)$, $f(x,a) = \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}$ Pro všechna $a \in I$ je $f(x,a)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
  - Pro všechna $x \in X$ a $a \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = \frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}$$

  - Volme $a = \frac{1}{2}$. Pak $F(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty f(\frac{1}{2}) < \infty$. (Ukázali jsme na začátku LSK.)
  - Existuje majoranta $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{1}{(1+x^2)(1+ax^2)}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

    Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$.

  Spojitost v 0 a 1:
  - Uvažujeme $a \in T = [0,2]$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,a) = \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)}$.
  - zafixujeme $a \in T$. Pak funkce $f(x,a)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
  - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.

– položme $g(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left| \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2(1+x^2)} \right| \leq \frac{2}{1+x^2}$$

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém T.

3. Určete trojrozměrnou Lebesgueovu míru množiny M, kde

$$M = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1,\ \sqrt{x^2+y^2} < 1 - \frac{|z|}{2} \right\}.$$

Řešení: Jde o průnik vnějšku koule a 2 kuželů (položených podstavou na podlahu). Množina je symetrická, stačí tedy uvažovat $z > 0$ a výsledný objem zdvojnásobit.

Zaveďme válcové souřadnice $(r\cos\alpha, r\sin\alpha, z)$, kde $r \in (0,\infty)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$. Pak z rovnic dostáváme

$$\sqrt{1-r^2} < z < 2 - 2r.$$

Krajní body pro r:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-r^2} &= 2 - 2r \\ 1 - r^2 &= 4 - 8r + 4r^2 \\ 0 &= r^2 - \frac{8}{5}r + \frac{3}{5}, \\ 0 &= \left(r - \frac{3}{5}\right)(r-1)\,. \end{aligned}$$

Protože zároveň $1 - r^2 > 0$ (z odmocniny), dostáváme $r \in (0, \frac{3}{5})$.

Integrujeme tedy

$$2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3/5} \left(\int_{\sqrt{1-r^2}}^{2-2r} r \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\alpha = 4\pi \int_0^{3/5} 2r - 2r^2 - r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{16\pi}{75}.$$

4. Spočtěte limitu $\lim_{n\to\infty} n \int_0^\infty (1+\frac{x}{n})^{-n} \sin\frac{x}{n}\,dx$.

Řešení:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}\,dx \\ &\quad = \int_0^\infty \left(\lim_{n\to\infty} \left(n\sin\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \right) dx = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \Gamma(2) = 1. \end{aligned}$$

Záměna podle Lebesgueovy věty. Pokud $n \geq 3$, pak $\binom{n}{3} \geq \frac{n^3}{27}$ a tudíž podle binomické věty $(1+\frac{x}{n})^n \geq 1 + \frac{x^3}{27}$. Dále $\sin\frac{x}{n} \leq \frac{x}{n}$. Tedy majoranta integrandu je

$$\frac{27\,x}{27+x^3}.$$

5. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-a^2x^2}}{x^2}\, dx.$$

Řešení: Máme

$$F'(a) = 2a \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\, dx = 2 \operatorname{sgn} a \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \pm\sqrt{\pi} \qquad (t = |a|\, x,\ a \neq 0).$$

Majoranta pro derivaci $qe^{-p^2x^2}$ pro $p < |a| < q$, $q > p > 0$. Máme

$$F(a) = \sqrt{\pi}\, a + C_1, \quad a > 0; \quad F(a) = -\sqrt{\pi}\, a + C_2, \quad a < 0.$$

Přímým výpočtem dostaneme $F(0) = 0$. Abychom odtud učinili závěr, že $F(a) = \sqrt{\pi}|a|$, $a \in \mathbb{R}$, musíme ještě ověřit spojitost F aspoň v nule. Majoranta pro spojitost je $\frac{1-e^{-q^2x^2}}{x^2}$ pro $|a| < q$, $q > 0$.

6. Spočtěte objem množiny $M = \{[x, y, z] :\ (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} < x^2 + y^2 - z^2\}$.

Řešení: Zaveďme sférické souřadnice: $x = r \cos\alpha \cos\beta$, $y = r \cos\alpha \sin\beta$, $z = r \sin\alpha$. Pak

$$\begin{aligned}
(r^2)^{5/2} &< r^2 \cos^2\alpha - r^2 \sin^2\alpha \\
r^5 &< r^2 \cos 2\alpha \\
0 < r^3 &< \cos 2\alpha
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\lambda_3(M) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_0^{\sqrt[3]{\cos 2\alpha}} r^2 \cos\alpha\, dr \Big)\, d\beta \Big)\, d\alpha \\
&= 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos\alpha\, \cos 2\alpha}{3}\, d\alpha = 2\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos\alpha (1 - 2\sin^2\alpha)}{3}\, d\alpha \\
&= \frac{2\pi}{3} \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1 - 2t^2)\, dt = \frac{4\pi}{3} \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} \Big) = \frac{4\sqrt{2}}{9}\, \pi.
\end{aligned}$$

7. Vyjádřete jako součet řady funkce $G(a)$ i $G'(a)$, kde

$$G(a) = \int_0^1 x^a \arctan x\, dx.$$

Řešení:

- Integrál konverguje pro $a > -2$. Pomocí Taylora $\arctan x$ dostaneme

$$\begin{aligned}
G(a) &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^a \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \Big)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^a \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\, dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(a + 2k + 2)(2k + 1)}.
\end{aligned}$$

Prohození řady a integrálu:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left| (-1)^k x^a \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+2k+2)(2k+1)} < \infty.$$

(srovnání s $\sum \frac{1}{k^2}$.)

- Na dluh prohodíme derivaci a integrál, pak

$$\begin{aligned} G'(a) &= \int_0^1 x^a \log x \arctan x \, dx \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \Big) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(a+2k+2)^2(2k+1)}. \end{aligned}$$

Prohození řady a integrálu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left| (-1)^k x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 -x^a \log x \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+2k+2)^2(2k+1)}.$$

Prohození derivace a integrálu:

  - zafixujme $0 > p > -2$. Pak uvažujme $a \in I = (p, \infty)$, $x \in (0,1)$, $f(x,a) = x^a \arctan x$.
  - Pro všechna $a \in I$ je $f(x,a)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
  - Pro všechna $x \in X$ a $a \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = x^a \log x \arctan x$$

  - Volme $a = 0$. Pak $G(0) = \int_0^1 \arctan x < \infty$. (Lze upočítat.)
  - Existuje majoranta $g(x) = |x^p \log x \arctan x|$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left| \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \right| = |x^a \log x \arctan x| \leq |x^p \log x \arctan x|$$

    Navíc $\int_0^1 g(x) < \infty$.

8. Spočtěte

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Řešení: Pro $a < 0$ integrál nemá smysl, protože v integračním oboru lze nalézt interval kladné délky, na němž integrand není definován.

Pro $a = 0$ je zřejmě $F(0) = 0$.

Pro $a \geq 0$ spočteme pomocí Fubinky:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\log(1+ax^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left[\frac{\log(1+tx^2)}{1+x^2}\right]_0^a \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \Big(\int_0^a \frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}\Big)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \Big(\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,a]\setminus\{1\}} \Big(\int_0^\infty \frac{1}{t-1}\Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+tx^2}\Big)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,a]\setminus\{1\}} \frac{1}{t-1}\Big(\Big[\arctan x\Big]_{x=0}^\infty - \Big[\frac{\arctan(\sqrt{t}\,x)}{\sqrt{t}}\Big]_{x=0}^\infty\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,a]\setminus\{1\}} \frac{\pi}{2(t-1)}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi \int_0^a \frac{1}{2\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)}\,\mathrm{d}t = \pi \int_0^{\sqrt{a}} \frac{dy}{1+y} = \pi\log(1+\sqrt{a})
\end{aligned}
$$

Ještě je potřeba ukázat spojitost $F(a)$ v 1:

- Uvažujeme $a \in T = [0,2]$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,a) = \frac{\ln(1+ax^2)}{(1+x^2)}$.
- zafixujeme $a \in T$. Pak funkce $f(x,a)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- položme $g(x) = \frac{\ln(1+2x^2)}{1+x^2}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left|\frac{\ln(1+ax^2)}{(1+x^2)}\right| \leq \frac{\ln(1+2x^2)}{(1+x^2)}$$

  Integrovatelnost $g(x)$ u ∞ ukážeme např. LSK s $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Závěr: funkce $F(a)$ je spojitá na celém T.

Celkem:

$$F(a) = \pi\log(1+\sqrt{a}), \qquad a \geq 0.$$