# 12. cvičení – Cylindrické a sférické souřadnice 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Příklady

1. Spočtěte objem tělesa (anuloid - torus) určeného $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2\}$, $0 < b < a$.

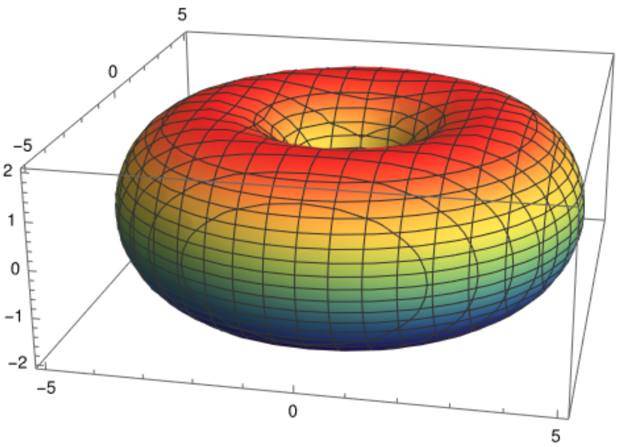
   **Řešení:** Donut. Válcové souřadnice.

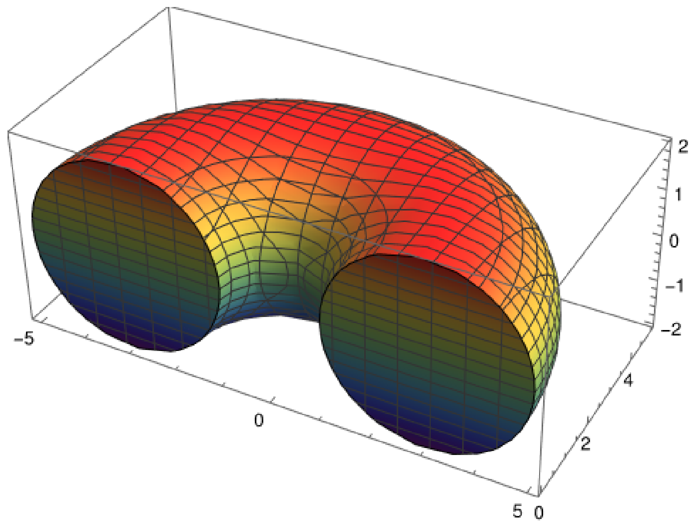
$$\begin{aligned} x(r, \alpha, z) &:= r\,\cos\alpha \\ y(r, \alpha, z) &:= r\,\sin\alpha, \\ z(r, \alpha, z) &:= z \end{aligned}$$

   Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$(\sqrt{r^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2$$

   Tedy $z \in (-\sqrt{b^2 - (r-a)^2}, \sqrt{b^2 - (r-a)^2})$, $r \in (a - b, a + b)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.




   Fubinka a věta o substituci.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{a-b}^{a+b}\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{a-b}^{a+b} r\,[z]_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{a-b}^{a+b} 2r\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

   Provedeme substituci $s = r - a$, $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{a-b}^{a+b} 2r\sqrt{b^2-(r-a)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha &= 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-b}^{b} (s+a)\sqrt{b^2-s^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\alpha \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-b}^{b} s\sqrt{b^2-s^2} + a\sqrt{b^2-s^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

První část integrálu je lichá v $s$, tedy integrál je nulový. Na druhou (sudou) část aplikujeme substituci $s = b\sin t$.

$$\begin{aligned}
2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-b}^{b} a\sqrt{b^2-s^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\alpha &= 4\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{b} a\sqrt{b^2-s^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\alpha \\
&= 4a\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2-b^2\sin^2 t}\; b\cos t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha \\
&= 4ab^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha \\
&= 4ab^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha \\
&= 2ab^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\alpha \\
&= 2ab^2\pi^2
\end{aligned}$$

2. Spočtěte objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\le 16; x^2+y^2\le 4y\}$

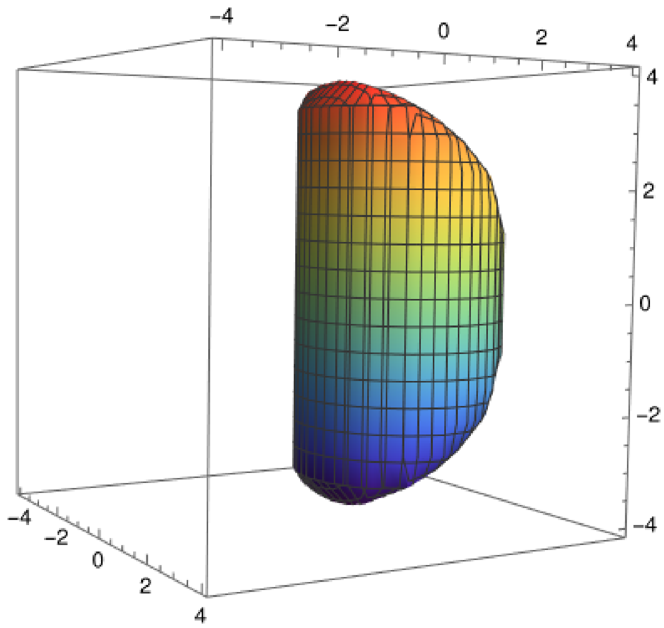
**Řešení:** Vivianiho okénko. Válcové souřadnice.

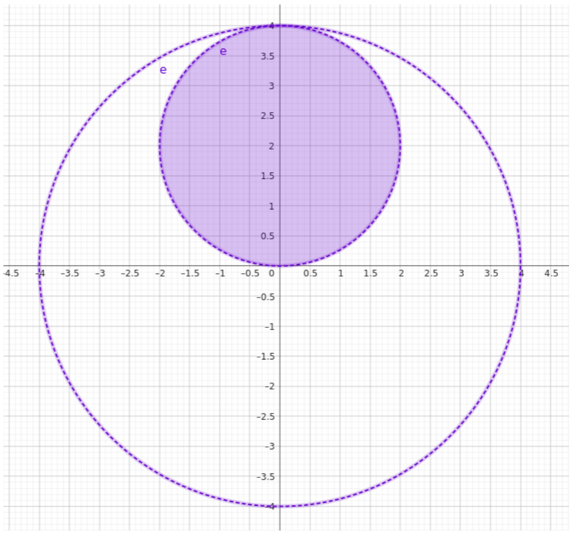
$$\begin{aligned}
x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha \\
y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha, \\
z(r,\alpha,z) &:= z
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnic dostáváme

$$\begin{aligned}
r^2+z^2 &\le 16, \\
r^2 &\le 4r\sin\alpha \\
0\le r &\le 4\sin\alpha
\end{aligned}$$

Tedy $z\in(-\sqrt{16-r^2},\sqrt{16-r^2})$, $r\in(0,4\sin\alpha)$, $\alpha\in(0,\pi)$.






Fubinka a věta o substituci.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\alpha}\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha &= \int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\alpha} 2r\sqrt{16-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_0^{\pi}\left[-\frac{2}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4\sin\alpha}\mathrm{d}\alpha \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(\sqrt{16-16\sin^2\alpha})^3 - 16^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\alpha \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(4\sqrt{\cos^2\alpha})^3 - 64\,\mathrm{d}\alpha \\
&= -\frac{2}{3}\cdot 64\int_0^{\pi}|\cos^3\alpha| - 1\,\mathrm{d}\alpha \\
&= -\frac{2}{3}\cdot 64\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\alpha - 1\,\mathrm{d}\alpha \\
&= -\frac{256}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\alpha)\cos\alpha - 1\,\mathrm{d}\alpha \\
&= -\frac{256}{3}\left[\sin\alpha - \frac{1}{3}\sin^3\alpha - \alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{256}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

3. Spočtěte míru množiny: $z\sqrt{x^2+y^2} < 2$; $\sqrt{x^2+y^2} < z+1$; $z > 0$.

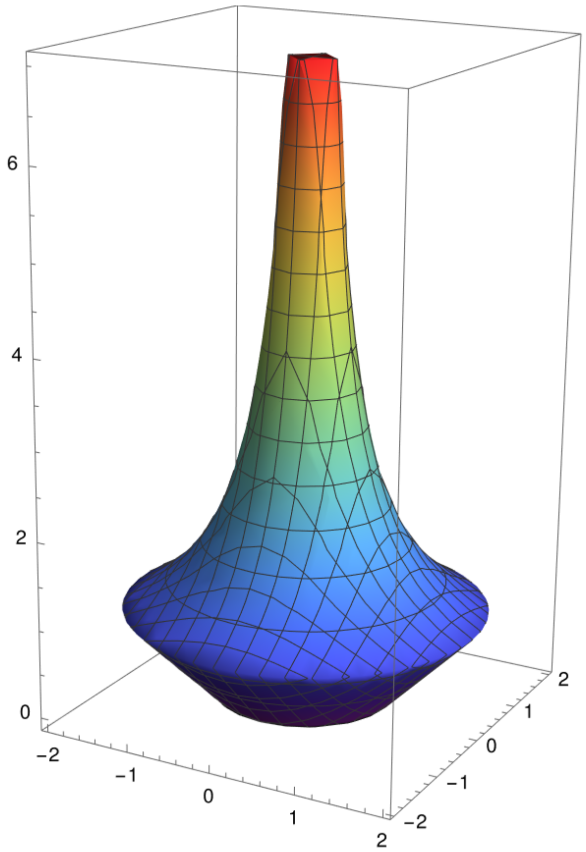
**Řešení:** Válcové souřadnice.

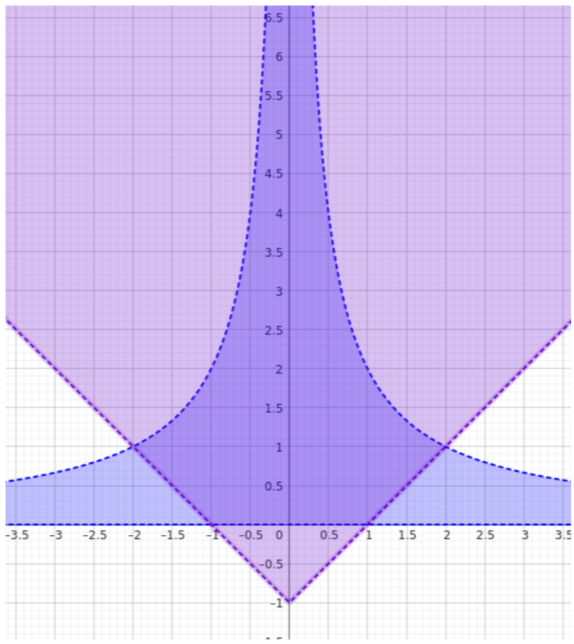
$$
\begin{aligned}
x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha \\
y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha, \\
z(r,\alpha,z) &:= z
\end{aligned}
$$

Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$\begin{aligned} zr &< 2 \\ r &< z+1 \\ z &> 0 \end{aligned}$$

Nakreslíme obrázek ve 2D a dostaneme $z \in (0,1)$, $r \in (0, z+1)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$ a také $z \in (1, \infty)$, $r \in (0, 2/z)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.



Dohromady (Fubinka a věta o substituci)

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \int_0^{z+1} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \int_0^{2/z} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\alpha \\ &\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} [r^2]_0^{z+1} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\alpha + \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{2} [r^2]_0^{2/z} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\alpha \\ &\quad = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 z^2 + 2z + 1 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_1^{\infty} \frac{4}{z^2} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\alpha \\ &\quad = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{z^3}{3} + z^2 + z \right]_0^1 \mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{-4}{z} \right]_1^{\infty} \mathrm{d}\alpha \\ &\quad = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{19}{3} \,\mathrm{d}\alpha \\ &\quad = \frac{19}{3} \pi \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int_M \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M$ je $0 < xz < x^2+y^2 < 1$, $z > 0$.

**Řešení:** Válcové souřadnice.

$$\begin{aligned} x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha \\ y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha, \\ z(r,\alpha,z) &:= z \end{aligned}$$

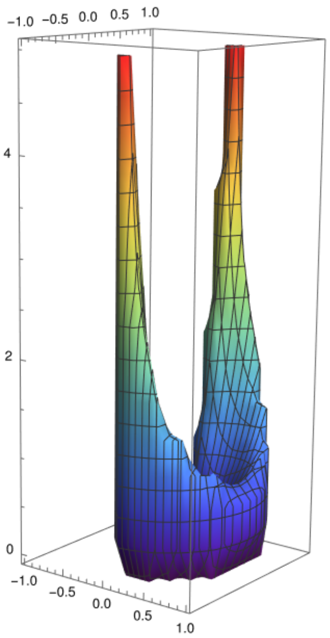
Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$\begin{aligned} &0 < zr\cos\alpha \quad < r^2 < 1 \\ &z > 0 \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &0 < \cos\alpha \\ &0 < r < 1 \\ &0 < z < r/\cos\alpha \end{aligned}$$

Máme $r \in (0,1)$, $z \in (0, r/\cos\alpha)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.




Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{r/\cos\alpha} \cos\alpha\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \qquad &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int_M x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M$ je $\dfrac{x^2+y^2}{2} < z < \sqrt{3-(x^2+y^2)}$.

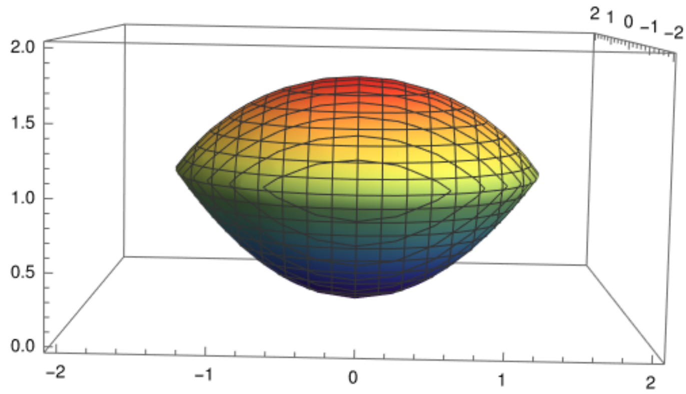
**Řešení:** Válcové souřadnice.

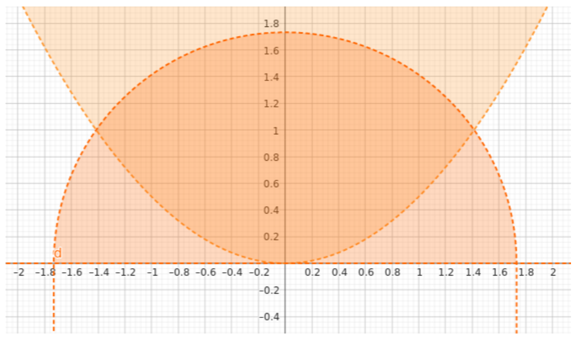
$$x(r,\alpha,z) := r\,\cos\alpha$$
$$y(r,\alpha,z) := r\,\sin\alpha,$$
$$z(r,\alpha,z) := z$$

Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$\frac{r^2}{2} < z < \sqrt{3-r^2}$$

Nakreslíme obrázek ve 2D a dostaneme $z \in (r^2/2, \sqrt{3-r^2})$, $r \in (0,\sqrt{2})$, $\alpha \in (-\pi,\pi)$.





Dohromady (Fubinka a věta o substituci)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2/2}^{\sqrt{3-r^2}} (r^2+z^2)r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left[r^3 z + \frac{rz^3}{3}\right]_{r^2/2}^{\sqrt{3-r^2}} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{3-r^2} + \frac{1}{3}(r(3-r^2)\sqrt{3-r^2}) - \frac{1}{2}r^5 - \frac{1}{24}r^7\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{3-r^2} + \frac{1}{3}(r(3-r^2)\sqrt{3-r^2})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha + \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -\frac{1}{2}r^5 - \frac{1}{24}r^7\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$

Na první integrál aplikujeme substituci $s = 3 - r^2$, druhý lze rovnou vyřešit.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{3-r^2} + \frac{1}{3}(r(3-r^2)\sqrt{3-r^2})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}\int_1^{3} \frac{1}{2}(3-s)\sqrt{s} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}s\sqrt{s}\right)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[s^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}s^{\frac{5}{2}}\right]_1^3 \mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{27\sqrt{3}-13}{15}\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= 2\cdot\frac{27\sqrt{3}-13}{15}\pi$$

dále

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -\frac{1}{2}r^5 - \frac{1}{24}r^7 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{r^6}{12} - \frac{r^8}{192}\right]_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{3}{4}\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= -\frac{3\pi}{2}$$

Dohromady dostáváme

$$2 \cdot \frac{27\sqrt{3}-13}{15}\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{5}\pi - \frac{97}{30}\pi.$$

6. Spočtěte míru množiny: $x^2+y^2 < 2-z$; $x^2+y^2+z^2 < 2z$. **Řešení:** Válcové souřadnice.

$$x(r,\alpha,z) := r\,\cos\alpha$$
$$y(r,\alpha,z) := r\,\sin\alpha,$$
$$z(r,\alpha,z) := z$$

Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$r^2 < 2-z$$
$$r^2+z^2 < 2z$$

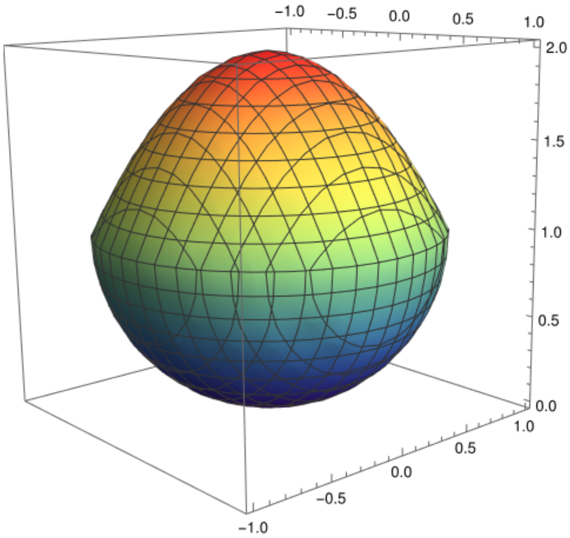
Neboli

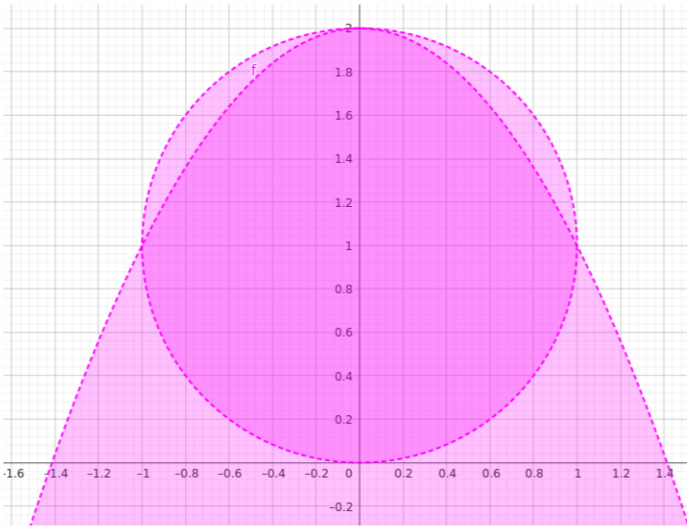
$$z < 2-r^2$$
$$r^2+(z-1)^2 < 1$$
$$(z-1)^2 < 1-r^2$$
$$(z-1) > -\sqrt{1-r^2}$$

Nakreslíme obrázek ve 2D a dostaneme $z \in (1-\sqrt{1-r^2}, 2-r^2)$, $r \in (0,1)$, $\alpha \in (-\pi,\pi)$. Dohromady (Fubinka a věta o substituci)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r^2} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r\,[z]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 2r - r^3 - r + r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^1 \mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{7}{12}\cdot 2\pi$$

7. Spočtěte míru množiny: $8x^2+2y^2 < z < 4-8x^2-2y^2$.





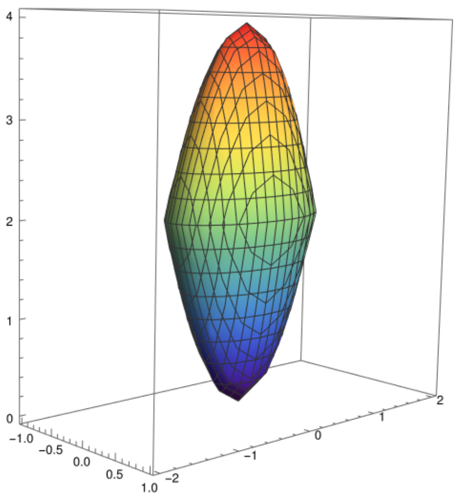
**Řešení:** Zobecněné válcové souřadnice.

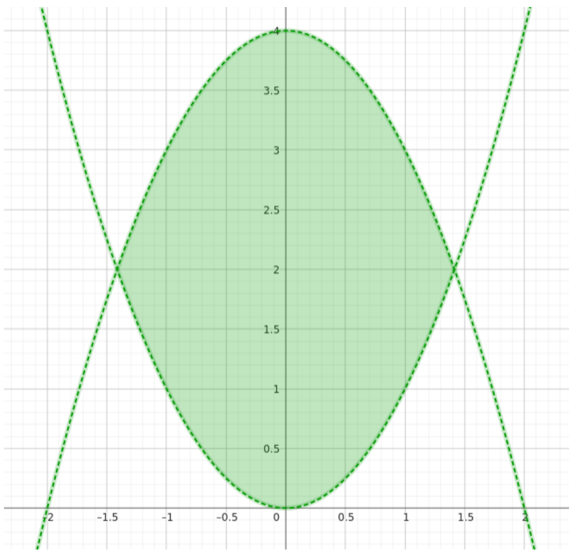
$$
\begin{aligned}
x(r,\alpha,z) &:= \frac{1}{\sqrt{8}} r\, \cos\alpha \\
y(r,\alpha,z) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} r\, \sin\alpha, \\
z(r,\alpha,z) &:= z
\end{aligned}
$$

Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$r^2 < z < 4 - r^2$$

Nakreslíme obrázek ve 2D a dostaneme $z \in (r^2, 4-r^2)$, $r \in (0, \sqrt{2})$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$.





Dohromady (Fubinka a věta o substituci)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} \frac{1}{\sqrt{16}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{4} r(4 - r^2 - r^2) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \left[ 2r^2 - \frac{r^4}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \pi$$

8. Muffin: Spočtěte objem tělesa $T$ určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

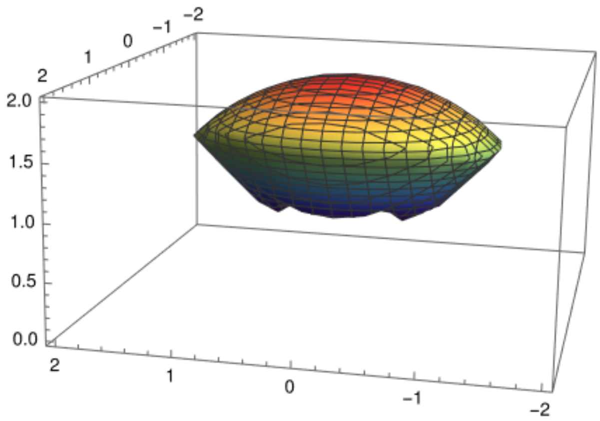
**Řešení:** Sférické souřadnice.

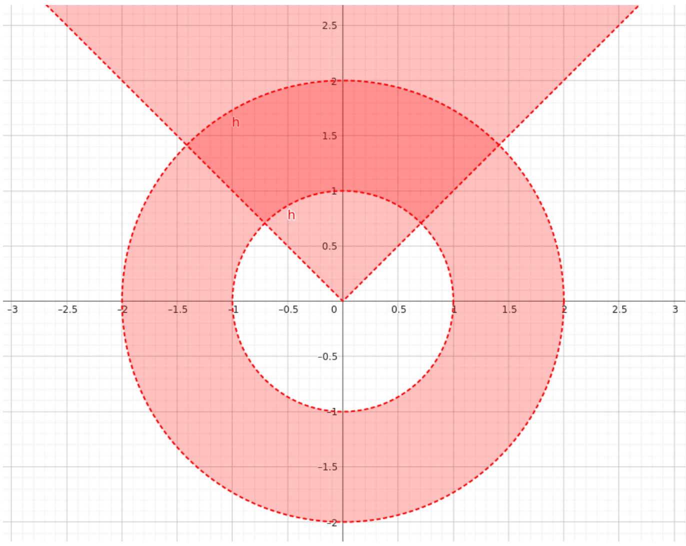
$$x(r, \beta, \gamma) := r \cos\gamma \cos\beta,$$
$$y(r, \beta, \gamma) := r \cos\gamma \sin\beta,$$
$$z(r, \beta, \gamma) := r \sin\gamma$$

Dosadíme

$$1 < r < 2$$
$$r^2 \cos^2\gamma < r^2 \sin^2\gamma$$
$$0 < r \sin\gamma$$

Tedy $r \in (1, 2)$, $\beta \in (-\pi, \pi)$, $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.



Fubinka a věta o substituci:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{1}^{2} r^2\cos\gamma \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\gamma\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\gamma\cdot\frac{7}{3}\cdot 2\pi\,\mathrm{d}\gamma\\ &= \frac{7}{3}\cdot 2\pi\left[\sin\gamma\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{7}{3}\cdot 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

9. Kornout se zmrzlinou: Spočtěte objem tělesa $T$ určeného vztahy $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)$.

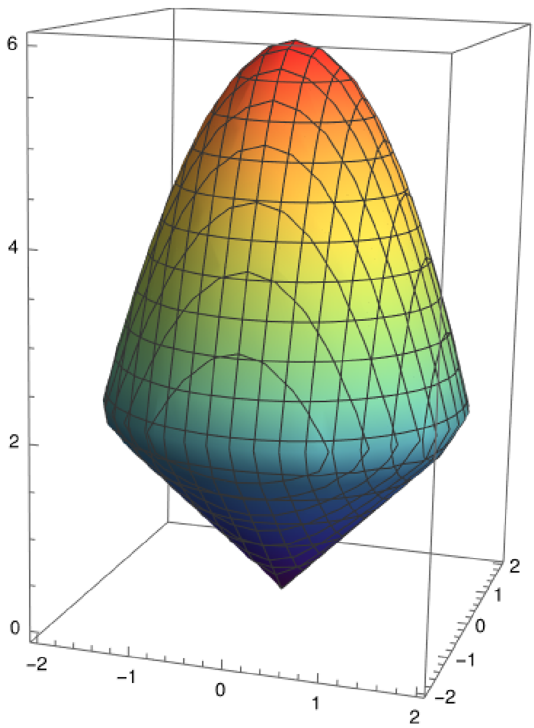
**Řešení:** Válcové souřadnice.

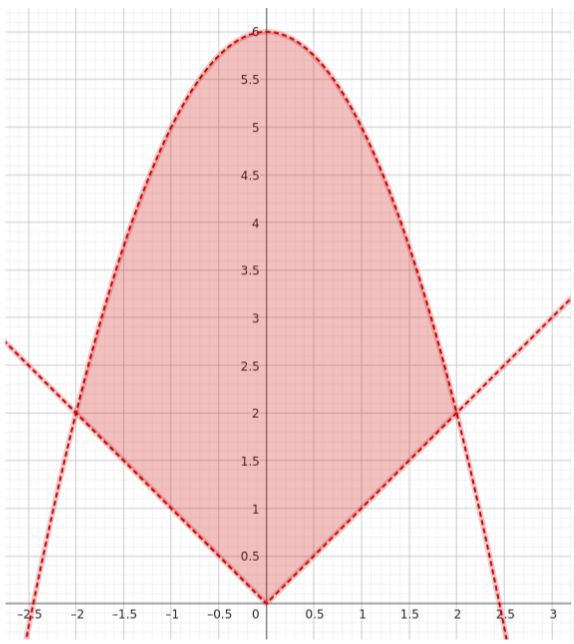
$$\begin{aligned}x(r,\alpha,z) &:= r\,\cos\alpha\\ y(r,\alpha,z) &:= r\,\sin\alpha,\\ z(r,\alpha,z) &:= z\end{aligned}$$

Po dosazení do nerovnic dostáváme

$$r < z < 6-r^2$$

Nakreslíme obrázek ve 2D a dostaneme $r\in(0,2)$, $z\in(r,6-r^2)$, $\alpha\in(-\pi,\pi)$.



Dohromady (Fubinka a věta o substituci)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2\int_r^{6-r^2} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 r(6-r^2-r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[3r^2-\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{32}{3}\pi.\end{aligned}$$

10. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

    **Řešení:** Uvažujme krychli, která má těžiště v počátku, tedy je tvaru $[-a,a]^3$. Nejdříve vyjádříme hustotu $\rho$. Je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od počátku, tedy

    $$\rho(x,y,z)=K(x^2+y^2+z^2),$$

    kde $K\in\mathbb{R}$. Ve vrcholech je $\rho=1$, tedy $\rho(a,a,a)=K3a^2=1$, odtud $K=\frac{1}{3a^2}$. Můžeme tedy sestavit integrál

    $$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{x^2+y^2+z^2}{3a^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{8}{3}a^3.$$

11. Určete hmotnost koule o poloměru $a$. Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

    **Řešení:** Analogicky předchozímu příkladu. Uvažujme kouli s těžištěm v počátku. Hustotu lze popsat jako

    $$\rho(x,y,z)=K\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

    Na povrchu je $\rho=1$, tedy $\rho(0,0,a)=Ka=1$, odtud $K=\frac{1}{a}$. Řešíme tedy integrál

    $$\int_M\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

    Zavedeme sférické souřadnice a dostáváme

    $$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\frac{1}{a}\cdot r\cdot r^2\cos\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}\beta=a^3\pi.$$

Zdroje příkladů a řešení:

http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf

https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416

https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-III-Krivkovy_integral.pdf

https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf

https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf

https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf

http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf