10. cvičení – Polární souřadnice

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Zakreslete následující množiny:

   $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$,

   (a) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (b) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, \pi]$
   (c) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$
   (d) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$
   (e) $r \in [1,4]$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (f) $r \in [2,4]$, $\alpha \in [0, \pi]$
   (g) $r \in [-1,4]$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$

   Řešení: Nakreslíme v programu.

2. Příklady máme odtud:
   https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf
   http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf
   https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf
   https://math.fel.cvut.cz/en/people/tiser/skr.pdf
   J. Kopáček, Matematická analýza nejen pro fyziky

   (a) $\displaystyle\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$

   Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

   Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} \pi^2 \le r^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha &\le 4\pi^2 \\ \pi^2 \le r^2 &\le 4\pi^2 \end{aligned}$$

   Navíc $\alpha \in (0, 2\pi)$.

   Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin\sqrt{r^2\sin^2\alpha + r^2\cos^2\alpha}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$$

   Z per partes

$$\int_0^{2\pi}\int_\pi^{2\pi} r\sin r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} [-r\cos r + \sin r]_\pi^{2\pi}\,\mathrm{d}\alpha = -3\pi\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\alpha = -6\pi^2$$

   (b) $\displaystyle\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2 < e, y \ge 0\}$

   Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} 1 &\le r^2 \le e \\ 0 &\le r \sin\alpha \end{aligned}$$

Tedy $r \in (1, \sqrt{e})$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\log r^2}{r^2} \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha$$

Ze substituce (obyčejná pro 1 proměnnou):

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4} [\log^2 r^2]_1^{\sqrt{e}} \,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

(c) $\displaystyle\int_M x \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x, y \ge 0, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos\alpha \\ y &= r \sin\alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} 1 &\le r^2 && \le 4 \\ 0 &\le r \cos\alpha \\ 0 &\le r \sin\alpha \end{aligned}$$

Tedy $r \in (1, 2)$ $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 r \cos\alpha \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos\alpha \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\alpha = \frac{7}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha = \frac{7}{3} [\sin\alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}$$

(d) $\displaystyle\int_M (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$

Řešení: Použijeme zobecněné polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 3r \cos\alpha \\ y &= 2r \sin\alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} \frac{9r^2 \cos^2\alpha}{9} + \frac{4r^2 \sin^2\alpha}{4} &\le 1 \\ r^2 &\le 1 \end{aligned}$$

Tedy $r \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$.

Integrál pak je tvaru (pozor na Jakobián):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (9r^2 \cos^2\alpha + 4r^2 \sin^2\alpha) 6r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha &= 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (5 \cos^2\alpha + 4) \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha \\ = 6 \int_0^{2\pi} (5 \cos^2\alpha + 4) \frac{1}{4} [r^4]_0^1 \,\mathrm{d}\alpha &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (5 \cos^2\alpha + 4) \,\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

Pomocí vzorečku $\cos\alpha^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{13}{2}\alpha + \frac{5}{4}\sin(2\alpha)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\cdot 13\pi.$$

(e) $\displaystyle\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2 < x\}$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

Z rovnic vyplyne

$$r^2 < r\cos\alpha$$
$$0 < r < \cos\alpha$$

Tedy $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $r\in(0,\cos\alpha)$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\alpha} \frac{1}{\sqrt{r^2}}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\alpha} 1\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2.$$

(f) $\displaystyle\int_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y]\in\mathbb{R}^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 2x, x \le x^2+y^2 \le 3x\} \setminus (0,0)$

Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned}
r\cos\alpha \le r^2 &\qquad \le 3r\cos\alpha\\
\cos\alpha \le r &\qquad \le 3\cos\alpha\\
\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{3}} \le r\sin\alpha &\qquad \le 2r\cos\alpha\\
\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}} \le \sin\alpha &\qquad \le 2\cos\alpha\\
\frac{1}{\sqrt{3}} \le \tan\alpha &\qquad \le 2
\end{aligned}$$

Tedy $\alpha\in(\frac{\pi}{6}, \arctan 2)$, $r\in(\cos\alpha, 3\cos\alpha)$.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctan 2}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \frac{1}{r^4}\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctan 2}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} r^{-3}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctan 2} -\frac{1}{2}[r^{-2}]_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{4}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctan 2} \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{4}{9}\,[\tan x]_{\frac{\pi}{6}}^{\arctan 2} = \frac{4}{9}\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

(g) Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou $(x^2+y^2)^2 \leq x^2-y^2$,
Řešení: Protože lemniskáta je symetrická podle obou os, stačí pracovat jen s 1. kvadrantem a pak plochu násobit 4.
Použijeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} 0 \leq r^4 &\leq r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ 0 \leq r &\leq \sqrt{\cos 2\alpha} \end{aligned}$$

Tedy $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ (jsme v 1. kvadrantu). Navíc $r \in (0, \sqrt{\cos 2\alpha})$.
Integrál pak je tvaru:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\alpha}} 1\cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\alpha \,\mathrm{d}\alpha = 1.$$

(h) $\displaystyle\int_M \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$
Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} 0 \leq r &\leq 1 \\ 0 \leq \sin\alpha & \\ 0 \leq \cos\alpha & \end{aligned}$$

Tedy $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r \in (0,1)$.
Integrál pak je tvaru:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \arctan(\tan\alpha)\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi^2}{16}$$

(i) $\displaystyle\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \leq xy \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$
Řešení: Použijeme souřadnice

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= y/x \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} 1 \leq u &\leq 3 \\ 1 \leq v &\leq 2 \end{aligned}$$

Vyjádříme souřadnice a spočteme jakobián. Máme $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2v}$$

Parciální derivace jsou na $u \in (1,3)$ a $v \in (1,2)$ spojité. Protože $v > 0$, tak $J \neq 0$. Tedy je zobrazení regulární. Lze navíc (z definice) ukázat, že zobrazení je prosté. Integrál pak je tvaru:

$$\int_1^3 \int_1^2 u^2 \frac{1}{2v} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_1^3 u^2 \frac{1}{2} \log 2 \, \mathrm{d}u = \frac{13}{3} \log 2.$$

(j) Spočti míru množiny $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, (x+y)^4 < ax^2y, x > 0\}$, $a > 0$
Řešení: Z předpisu M plyne, že $x, y > 0$. Použijeme tedy souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos^2 \alpha \\ y &= r \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

kde $r \in (0, \infty)$ a $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} 0 < r^4 &< ar^3 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \\ 0 < r &< a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Jakobián vyjde $r \sin 2\alpha$.
Integrál pak je tvaru:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha} r \sin(2\alpha) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} [r^2]_0^{a \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha} \, \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^9 \alpha \sin^5 \alpha \end{aligned}$$

Ze substituce

$$\left[-\frac{\cos^{10}(x)}{10} + \frac{\cos^{12}(x)}{6} - \frac{\cos^{14}(x)}{14} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{210}$$

(k) míru M, kde M je ohraničena křivkami $xy = a$, $xy = b$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $0 < a < b$ a $0 < m < n$.
Řešení: Použijeme souřadnice

$$\begin{aligned} u &= xy \\ v &= y^2/x \end{aligned}$$

Z rovnic vyplyne

$$\begin{aligned} a \le u &\le b \\ m \le v &\le n \end{aligned}$$

Vyjádříme souřadnice a spočteme jakobián. Máme $x = \sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$, $y = \sqrt[3]{uv}$.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\sqrt[3]{uv}} & -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^4}} \\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{3v}$$

Parciální derivace jsou na $u \in (a,b)$ a $v \in (m,n)$ spojité. Protože $v > 0$, tak $J \neq 0$. Tedy je zobrazení regulární. Lze navíc (z definice) ukázat, že zobrazení je prosté.

Integrál pak je tvaru:

$$\int_a^b \int_m^n \frac{1}{3v} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}(b-a) \log \frac{n}{m}.$$

Bonus

3. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

   (a) i. $\int_{-4}^{e}\int_{1}^{3}\int_{0}^{2} xyz^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ANO

   ii. $\int_{0}^{2}\int_{1}^{3}\int_{-4}^{e} xyz^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ANO

   iii. $\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}\int_{-4}^{e} xyz^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$ ANO

   (b) i. $\int_{0}^{3}\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ ANO

   ii. $\int_{0}^{3}\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ NE

   iii. $\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$ NE

   iv. $\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ NE

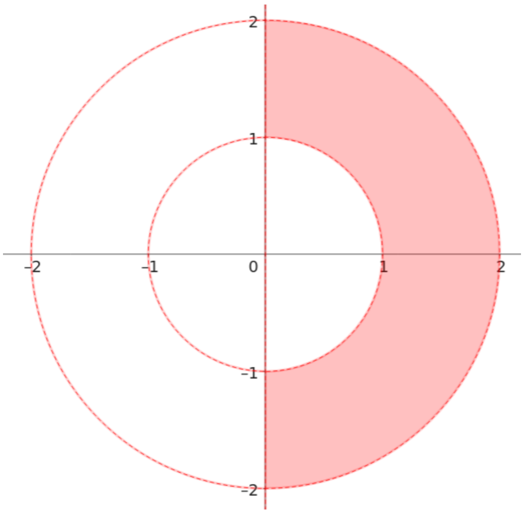
   (c) i. $\int_{0}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$ ANO

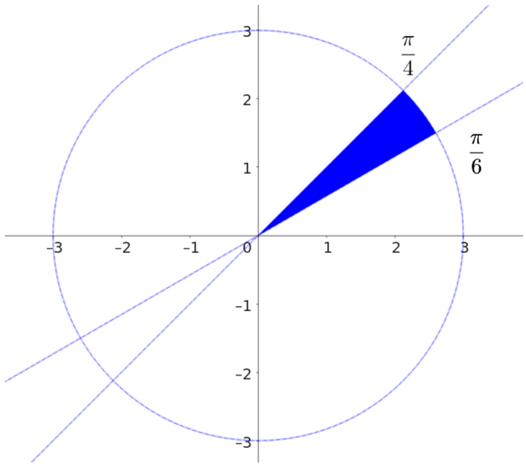
   ii. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha$ ANO

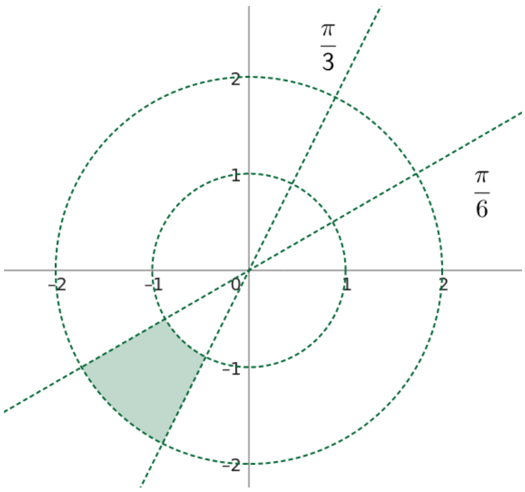
   iii. $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{0}^{1} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$ ANO

   iv. $\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z}r^2 \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ NE

4. Zapište následující množiny polárními souřadnicemi







červená: $r \in (1, 2)$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

modrá: $r \in (0, 3)$, $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

zelená: $r \in (1, 2)$, $\alpha \in (\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$.