10. cvičení – Polární souřadnice

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1 (Diferencovatelné zobrazení)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : G \to \mathbb{R}^m$ je zobrazení diferencovatelné v bodě $x \in G$. Matice lineárního zobrazení $\varphi'(t)$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení φ v bodě t. Je to tedy matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t)\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}.$$

Zobrazení $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojité všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v G hodnost n.

Je-li $m = n$, pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t.

Postup výpočtu $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x$

1. volba substituce
2. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)
3. výpočet J_φ
4. určení $\phi^{-1}(M)$
5. výpočet integrálu $\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$

Příklady

1. Zakreslete následující množiny:

   $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$,

   (a) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (b) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, \pi]$
   (c) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$
   (d) $r \in [0,4]$, $\alpha \in [0, 2\pi]$
   (e) $r \in [1,4]$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$
   (f) $r \in [2,4]$, $\alpha \in [0, \pi]$
   (g) $r \in [-1,4]$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$

2. (a) $\displaystyle\int_M \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$

   (b) $\displaystyle\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2 < e, y \ge 0\}$

   (c) $\displaystyle\int_M x\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x,y \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$

   (d) $\displaystyle\int_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$

   (e) $\displaystyle\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 < x\}$

   (f) $\displaystyle\int_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 2x, x \le x^2+y^2 \le 3x\} \setminus (0,0)$

   (g) Vypočítejte obsah plochy ohraničené lemniskátou $(x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2$,

(h) $\displaystyle\int_M \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \le 1, x, y \ge 0\}$

(i)♡ $\displaystyle\int_M x^2y^2\,\mathrm{d}\lambda$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, 1 \le xy \le 3, x \le y \le 2x\}$

(j)♡ Spočti míru množiny $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, (x+y)^4 < ax^2y, x > 0\}$, $a > 0$

(k)♡ míru M, kde M je ohraničena křivkami $xy = a$, $xy = b$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, $0 < a < b$ a $0 < m < n$.

Bonus

3. Určete, zda jsou integrály ve správném pořadí či nikoli

(a) i. $\displaystyle\int_{-4}^{e}\int_{1}^{3}\int_{0}^{2} xyz^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

ii. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{3}\int_{-4}^{e} xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

iii. $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{2}\int_{-4}^{e} xyz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

(b) i. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

ii. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

iii. $\displaystyle\int_{x}^{x^2}\int_{y}^{y+2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

iv. $\displaystyle\int_{y}^{y+2}\int_{x}^{x^2}\int_{0}^{3} \frac{x}{z}\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

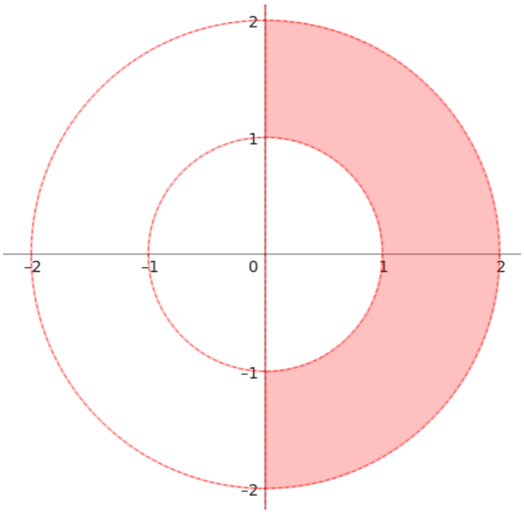
(c) i. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z$

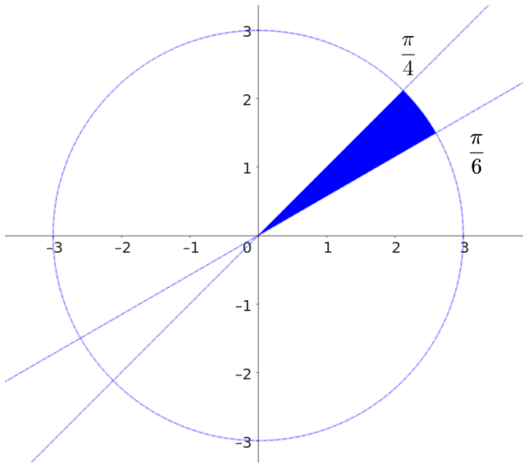
ii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha$

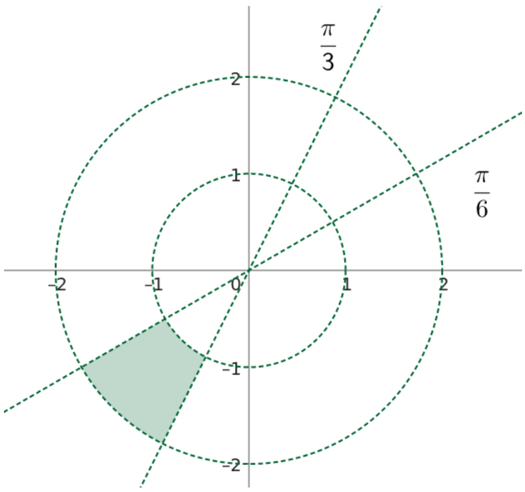
iii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{0}^{1} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha$

iv. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\cos\alpha}^{3\cos\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z}r^2\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

4. Zapište následující množiny polárními souřadnicemi







(2a) $\int t \sin t \, dt = -t\cos t + \sin t$
(2d) $3r\cos\alpha, 2r\sin\alpha$, $J = 6r$
(2g) řešme jen 1. kvadrant, $0 < r < \sqrt{\cos 2\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
(2i) $u = xy$, $v = y/x$
(2j) $x = r\cos^2\alpha$, $y = r\sin^2\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r \in (0, \infty)$
(2k) $u = xy$, $v = y^2/x$

http://brownsharpie.courtneygibbons.org/wp-content/comics/2006/10/2006-10-15-polar-coordinates.jpg