

9. cvičení – Fubiniho věta

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Spočtěte

$$(a) \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

Řešení: Pro $a = b$ vyjde $\int = 0$.

Nechť $0 < b < a$. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx}}{x} \right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{-yx}}{x} \right) dy dx = \int_0^\infty \int_b^a -e^{-yx} dy dx \\ &\stackrel{Fub}{=} \int_b^a \int_0^\infty -e^{-yx} dx dy = \int_b^a \left[\frac{e^{-yx}}{y} \right]_0^\infty dy = \int_b^a \frac{-1}{y} dy \\ &= \log b - \log a = \log \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Předpoklady Fubinky. Pracujeme s integrálem

$$-\int_0^\infty \int_b^a e^{-yx} dy dx$$

- funkce e^{-yx} je nezáporná spojitá (a tedy měřitelná) funkce. Množina $(0, \infty) \times (b, a)$ je měřitelná (obdélník). Závěr: integrál má smysl.

Analogicky projde výpočet pro $0 < a < b$. V ostatních případech integrál diverguje.

$$(b) \int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2 x^2) - \ln(1 + b^2 x^2)}{x^2} dx$$

Řešení: Nechť $0 < b < a$. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2 x^2) - \ln(1 + b^2 x^2)}{x^2} dx &= \int_0^\infty \left[\frac{\ln(1 + y^2 x^2)}{x^2} \right]_b^a dx \\ &= \int_0^\infty \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\ln(1 + y^2 x^2)}{x^2} \right) dy dx \\ &= \int_0^\infty \int_b^a \frac{2y}{1 + y^2 x^2} dy dx \\ &\stackrel{Fub}{=} \int_b^a \int_0^\infty \frac{2y}{1 + y^2 x^2} dx dy \\ &= \int_b^a [2 \arctan yx]_0^\infty dy = \int_b^a \pi dy = \pi(a - b) \end{aligned}$$

Předpoklady Fubinky. Pracujeme s integrálem

$$-\int_0^\infty \int_b^a \frac{2y}{1 + y^2 x^2} dy dx$$

- najdeme majorantu

$$\left| \frac{2y}{1 + y^2 x^2} \right| \leq \frac{2|a|}{1 + b^2 x^2}.$$

Množina $(0, \infty) \times (b, a)$ je měřitelná (obdélník). Závěr: integrál má smysl.

Analogicky projde výpočet pro $0 < a < b$.

Dále platí, že funkce $F(a, b) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2} dx$ je sudá v obou proměnných, tedy

$$F(-a, b) = F(a, b) = F(a, -b) = F(-a, -b) = \pi(|a| - |b|).$$

$$(c) \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx$$

Řešení: Necht' $-1 < a < 0$. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-0x^2} - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{xe^{x^2}} \right]_a^0 dx \\ &= \int_0^\infty \int_a^0 -xe^{x^2(-1-y)} dy dx \stackrel{Fub}{=} \int_a^0 \int_0^\infty -xe^{x^2(-1-y)} dx dy \\ &= \int_a^0 \left[\frac{e^{x^2(-1-y)}}{2(1+y)} \right]_0^\infty dy = \int_a^0 \frac{-1}{2(1+y)} dy = - \left[\frac{1}{2} \ln(1+y) \right]_a^0 \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+a) \end{aligned}$$

Předpoklady Fubinky. Pracujeme s integrálem

$$\int_0^\infty \int_a^0 -xe^{x^2(-1-y)} dy dx$$

Funkce $-xe^{x^2(-1-y)}$ je záporná. Množina $(0, \infty) \times (a, 0)$ je měřitelná (obdélník). Závěr: integrál má smysl.

Analogicky projde výpočet pro $a > 0$.

$$(d) \int_0^\infty \frac{\arctan x^a - \arctan x^b}{x \ln x} dx$$

Řešení: Necht' $0 < b < a$. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\arctan x^a - \arctan x^b}{x \ln x} dx &= \int_0^\infty \left[\frac{\arctan x^y}{x \ln x} \right]_b^a dx \\ &= \int_0^\infty \int_b^a \frac{x^{y-1}}{1+x^{2y}} dy dx \\ &\stackrel{Fub}{=} \int_b^a \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{1+x^{2y}} dx dy \end{aligned}$$

Použijeme substituci $t = x^y$, $dt = yx^{y-1} dx$.

$$\begin{aligned} \int_b^a \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{1+x^{2y}} dx dy &= \int_b^a \int_0^\infty \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt dy &= \int_b^a \frac{1}{y} [\arctan t]_0^\infty dy \\ &= \int_b^a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y} dy = \frac{\pi}{2} [\ln |y|]_b^a = \frac{\pi}{2} \ln \left| \frac{a}{b} \right| \end{aligned}$$

Předpoklady Fubinky. Pracujeme s integrálem

$$\int_0^\infty \int_b^a \frac{x^{y-1}}{1+x^{2y}} dy dx$$

Funkce $\frac{x^{y-1}}{1+x^{2y}} \geq 0$ Množina $(0, \infty) \times (b, a)$ je měřitelná (obdélník). Závěr: integrál má smysl.

Analogicky případy $a, b < 0$, $a, b > 0$.

(e) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

Řešení: Necht' $-1 < a < b$. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx &= \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_a^b dx = \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx \stackrel{Fub}{=} \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy \\ &= \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = [\ln |1+y|]_a^b = \ln \left| \frac{b+1}{a+1} \right| \end{aligned}$$

Předpoklady Fubinky. Pracujeme s integrálem

$$\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx$$

Platí $x^y > 0$. Množina $(0, 1) \times (a, b)$ je měřitelná (obdélník). Závěr: integrál má smysl.

Analogicky projde výpočet pro $-1 < b < a$. Pro $a = b = 0$ je $\int = 0$. V ostatních případech integrál diverguje.

(f) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$

Řešení: Pro $a = b$ vyjde $\int = 0$.

Necht' $0 < b < a$. Pak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-yx^2}}{x} \right]_b^a dx = \int_0^\infty \int_b^a -xe^{-yx^2} dy dx \\ &\stackrel{Fub}{=} \int_b^a \int_0^\infty -xe^{-yx^2} dx dy = \int_b^a \left[\frac{e^{-yx^2}}{2y} \right]_0^\infty dy = \int_b^a \frac{-1}{2y} dy \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Předpoklady Fubinky. Pracujeme s integrálem

$$-\int_0^\infty \int_b^a xe^{-yx^2} dy dx$$

- funkce e^{-yx} je záporná spojitá (a tedy měřitelná) funkce. Množina $(0, \infty) \times (b, a)$ je měřitelná (obdélník). Závěr: integrál má smysl.

Analogicky projde výpočet pro $0 < a < b$. V ostatních případech integrál diverguje.

2. Spočítejte míru množiny

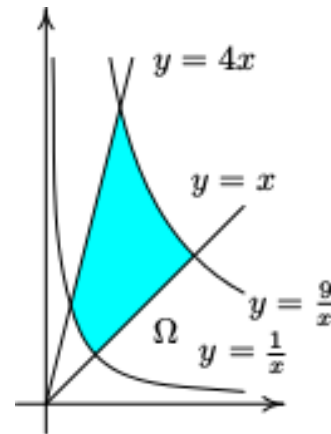
- (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$
- (b) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x, 0 \leq z \leq xy^2\}$
- (c) M , která je ohraničena plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$.
- (d) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \arctan y, 0 \leq z \leq \frac{6x}{1+y^2}\}$

3. Spočítejte integrál přes množinu

- (a) $\int_M xy dA$ kde M je ohraničena křivkami $y = -x$ a $y = x - x^2$.
- (b) $\int_M y d\lambda$, kde M je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.
- (c) $\int_M e^{x/y} d\lambda$, kde M je určena vztahy $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ a $y^2 = x$.
- (d) $\int_M \frac{y}{x} d\lambda$, kde M je určena vztahy $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = \frac{1}{2}$.
- (e) $\int_M 1 d\lambda$, kde M je určena vztahy $x + y = 4$, $x + y = 12$ a $y^2 = 2x$.
- (f) $\int_M x^2 + y^2 dA$ kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- (g) $\int_M y \cos(x+z) dA$ kde M je ohraničena plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.
- (h) $\int_M \frac{dA}{1+x+y}$ kde $M = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

4. Sestavte (nepočítejte) dvojné integrály z funkce $f(x, y)$ přes množiny

- (a) $M = \{x \leq 2; 1 \leq y \leq e^x\}$
- (b) $M = \{0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x^2\}$
- (c) $M = \{x^2 - 4x + 5 \leq y \leq 6x - 3 - x^2\}$
- (d) M na obrázku



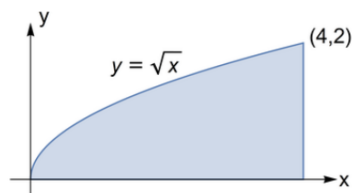
Bonus

5. Spočítejte integrál $\int_M x^y d\lambda$, kde $M = [0, 1] \times [1, 2]$. Zkuste zaměnit pořadí integrace.

6. Změňte pořadí integrace

(a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x, y) dy dx$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x, y) dx dy$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x, y) dy dx$

7. Který z následujících integrálů počítá obsah útvaru na obrázku?



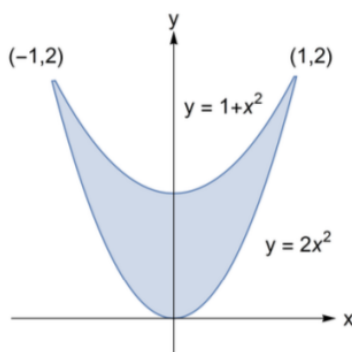
(A) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1 dy dx$

(C) $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^4 1 dx dy$

(B) $\int_0^4 \int_0^2 \sqrt{x} dy dx$

(D) $\int_0^2 \int_0^{y^2} 1 dx dy$

8. Který z následujících výrazů NEpočítá obsah útvaru na obrázku?



(A) $\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy dx$

(B) $2 \int_0^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy dx$

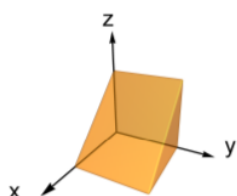
C $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}/2} 1 dx dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{-\sqrt{y-1}/2} 1 dx dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1 dx dy$

D $2 \int_0^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1 dx dy$

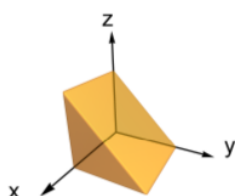
9. Určete množinu, přes kterou integrujeme v integrálu

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^1 f(x, y, z) dz dy dx.$$

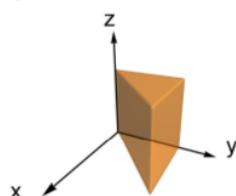
A.



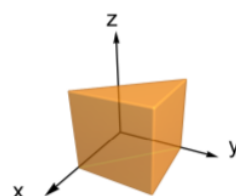
B.



C.

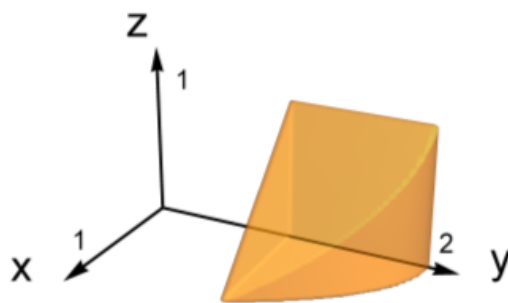


D.

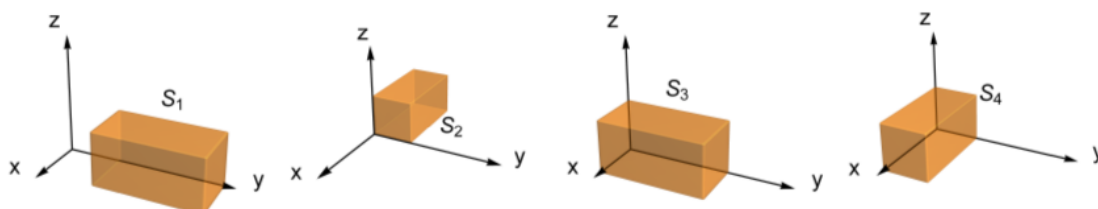


10. Na obrázku je těleso ohraničené plochami $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 1$ a plochou $y = 2 - x^2$. Který z následujících integrálů počítá jeho objem?

- (A) $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} \int_0^{1-x} dz dy dx$
 (B) $\int_0^1 \int_1^{1-x} \int_0^{2-x^2} dz dy dx$
 (C) $\int_0^1 \int_1^{2-x^2} \int_0^{1-x} dz dy dx$
 (D) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x^2} dz dy dx$



11. Na obrázku je stejné těleso v různých polohách. Seřadte integrály $\iiint_{S_k} x \, d\lambda$ podle velikosti.



- (A) $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$
 (B) $I_2 < I_1 = I_3 < I_4$
 (C) $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$
 (D) $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$
 (E) $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$

Zdroj 7.-11.: <http://www.cpp.edu/concepttests/question-library/mat215.shtml>



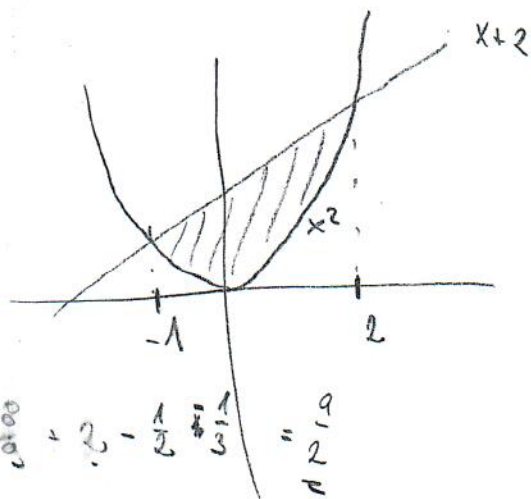
Figure 1: <https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2012/10/31/scary-math-facts-for-halloween/>

(2) $\log(1+t) \leq t$
 (3) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$. Zvolte $\delta > 0$ a odhadněte integrál pro $|\alpha| > \delta$.
 (4d) Situace $\beta \geq 0, \alpha > 0$ z věty o spojitosti.

(2a) $M \text{ of } \mathcal{R}; \quad x^2 \leq y \leq x+2$

$$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) \, dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 4 + 2 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{9}{2}$$



2b

$$0 \leq x \leq 1, \quad |y| \leq x, \quad 0 \leq z \leq xy^2$$

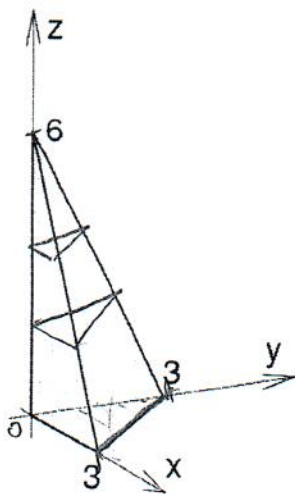
$$\int_0^1 \int_{-x}^x \int_0^{xy^2} 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{-x}^x [z]_0^{xy^2} \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_{-x}^x xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{-x}^x \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} \right) \, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}$$

(2c)

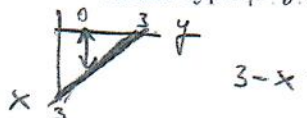
d) M je ohraničena plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



Rovina $2x + 2y + z = 6$ protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích $x = 3$, $y = 3$, $z = 6$. Průmět množiny M do roviny je trojúhelník o vrcholech $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$. Platí tedy

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 - x \\ 0 \leq z \leq 6 - 2x - 2y \end{cases}$$

M je v tomto případě čtyřlístěn a jedná se o elementární oblast typu $[x, y, z]$.



2.6 Integrály na měřitelných množinách

V této kapitole rozšíříme pojem n -rozměrného integrálu na měřitelné množiny:

Definice 2.5 Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je integrovatelná na množině M , tj. že existuje integrál (Riemannuv) z funkce f na množině M , existuje-li interval $I \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $M \subset I$ a funkce $f \cdot \chi_M$ je na I integrovatelná.

Potom klademe

$$\int_M f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I (f \cdot \chi_M)(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

V následujících úvahách se omezíme na $n = 2, 3$.

Postačující podmínky pro existenci integrálu udává následující věta:

Věta 2.5 Je-li $M \subset \mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je na M ohraničena a skoro vsude spojitá, pak je f na M integrovatelná.

(Připomeňme, že nějaké tvrzení platí na množině M skoro všude, jestliže platí $\forall x \in M \setminus A \subset \mathbb{R}^k$ a neplatí $\forall x \in A$, kde $\nu_k(A) = 0$ (tj. platí s výjimkou množiny nulové míry).) Fubiniova věta pro výpočet integrálu se dá snadno rozšířit na elementární oblasti:

Věta 2.6 Necht

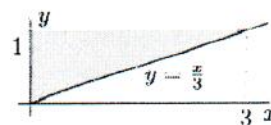
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, d(x) \leq y \leq h(x)\}, \quad \text{resp.}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, d_1(x) \leq y \leq h_1(x), d_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

řešení:

Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω . Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω . Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{3y} \underbrace{\left(\int_0^{x^2+y^2} 1 \, dz \right)}_{=x^2+y^2} dx \right) dy = \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{3y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 12y^3 dy = 12 \left[\frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = 3
 \end{aligned}$$



nebo jinak

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \int_0^3 \left(\int_{\frac{x}{3}}^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 + x^2 - \frac{28}{81}x^3 \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{81}x^4 \right]_0^3 = 3.
 \end{aligned}$$

Příklad 9.8:

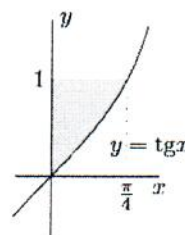
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z]; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \arctg y, 0 \leq z \leq \frac{6x}{1+y^2} \right\}.$$

řešení:

Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω . Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω . Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál

$$\begin{aligned}
 V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\arctg y} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1 \, dz \right)}_{=\frac{6x}{1+y^2}} dx \right) dy = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+y^2} \int_0^{\arctg y} 6x \, dx \right) dy = 3 \int_0^1 \frac{\arctg^2 y}{1+y^2} dy = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+y^2} \cdot (1+y^2) dt = 3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64},
 \end{aligned}$$



použili jsme substituci $t := \arctg y$, pak $dt = \frac{1}{1+y^2} dy$ tedy $dy = (1+y^2) dt$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

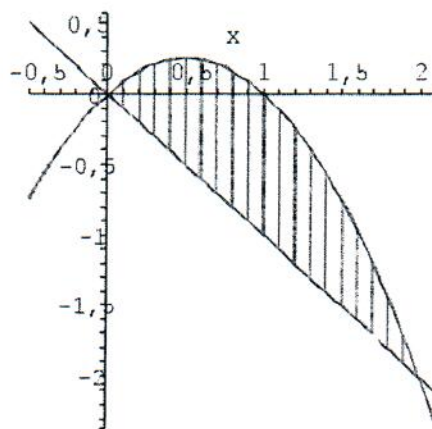
$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\tg x}^1 \frac{6x}{1+y^2} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x [\arctg y]_{y=\tg x}^{y=1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x \left(\frac{\pi}{4} - x \right) dx = \left[\frac{3}{4} \pi x^2 - 2x^3 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64},$$

neboť Ω lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ a $\tg x \leq y \leq 1$.

Příklad 9.9:

Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x, y, z]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \ln y, 0 \leq z \leq \frac{6x}{y} \right\}.$$



Obr. 1

(3a)

Řešení: M je ohraničená přímkou $y = -x$ a parabolou $y = x - x^2$ (Obr. 1).

Souřadnice průsečíků obou křivek získáme řešením soustavy dvou rovnic

$$\begin{aligned} y &= -x, \\ y &= x - x^2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy zjistíme, že křivky se protnou v bodech $(0, 0)$ a $(2, -2)$. Funkce $f(x, y) = xy$ je na M spojitá a je zřejmé, že pro libovolné $x \in (0, 2)$ je $-x \leq y \leq x - x^2$. Užitím Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\begin{aligned} \int_M xy \, dA &= \int_0^2 \int_{-x}^{x-x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=-x}^{y=x-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (x(x-x^2)^2 - x^3) \, dx = -\frac{16}{15}. \end{aligned}$$

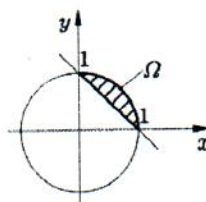
Příklad 1.9. Vypočítejme dvojný integrál

$$\int_M \frac{x^2}{y^2} \, dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkami $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ a $x = 3$.

Řešení: Množina M je část roviny ohraničená přímkami $y = x$, $x = 3$ a hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ (Obr. 2).

Vyšetřením průsečíků křivek, které tvoří hranici množiny a také z obrázku je zřejmé, že pro všechny body (x, y) množiny je $x \in (1, 3)$ a $\frac{1}{x} \leq y \leq x$. Protože

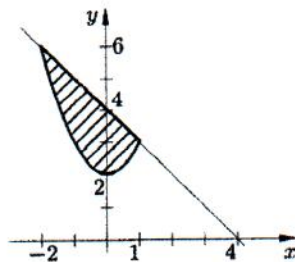
Obrázek 13: $\Omega : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$

Zvolíme-li typ (y, x) , pak $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 1 - y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$. V tomto případě vede výpočet na jednodušší integrál.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 (y^3 - y^4) dy = \frac{1}{20}.$$

84. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} y dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 14. Popíšme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a paraboly. Řešíme $x^2 + 2 = 4 - x$. Odtud $x^2 + x - 2 = 0$ a $x_1 = -2, x_2 = 1$. Platí $\Omega = \{[x, y]; -2 \leq x \leq 1, x^2 + 2 \leq y \leq 4 - x\}$.

Obrázek 14: $\Omega : x^2 - y + 2 = 0, x + y - 4 = 0$

$$\iint_{\Omega} y dx dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2+2}^{4-x} y dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2+2}^{4-x} dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} ((4-x)^2 - (x^2+2)^2) dx = \frac{81}{5}.$$

85. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} xy dx dy$, kde Ω je určena vztahy $xy = 1, 2x + 2y - 5 = 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a hyperbolou. Viz Obrázek 15. Popíšme obor Ω jako oblast typu (x, y) . Krajní meze x -ové souřadnice oblasti získáme jako x -ové souřadnice průsečíků přímky a hyperboly. Řešíme $x(\frac{5}{2} - x) = 1$. Odtud $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$. Platí $\Omega = \{[x, y]; \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{5}{2} - x\}$.

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xy dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x \left(\frac{5}{2} - x \right)^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{165}{128} - \ln 2.$$

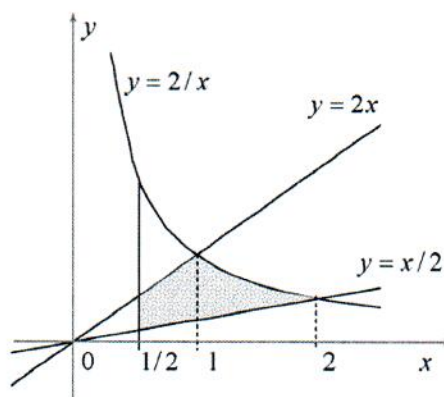
86. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} e^{\frac{x}{y}} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x = 0, y = 1, y = 2, y^2 = x$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a parabolou. Viz Obrázek 16. Popíšme obor Ω jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y^2\}$.

(3d)

Příklad 8: Vypočítejte integrál $\int \int_D \frac{y}{x} dx dy$, kde množina D je omezená rovinná oblast ohraničená křivkami: $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = \frac{1}{2}$.

Řešení: Integrační obor D je ohraničen třemi přímkami a jednou větví hyperboly - viz Obrázek 1.6. Je zřejmé, že obor D není oblast prvního ani druhého druhu. Lze jej ale rozdělit na dvě oblasti prvního druhu D_1 a D_2 tak, že $D_1 \cup D_2 = D$. Funkce $f(x, y) = \frac{y}{x}$ je na D spojitá a ohraničená. Dvojný integrál existuje. Převědeme jej na součet dvou integrálů. Dostaneme:

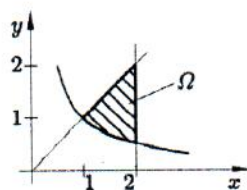


Obrázek 1.6: $D : y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y}{x} dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \frac{y}{x} dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} \frac{y}{x} dy \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} [y^2]_{\frac{x}{2}}^{2x} dx \\ &+ \int_1^2 \frac{1}{2x} [y^2]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{15}{8} x dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x}{8} \right) dx = \frac{81}{64}. \end{aligned}$$

Příklad 1.1.1: Převědte $\int \int_D 1 dx dy$ na dvojnásobný (pokud to lze) nebo na součet dvojnásobných integrálů. Množina D je omezená oblast v rovině ohraničená křivkami nebo určená nerovnicemi.

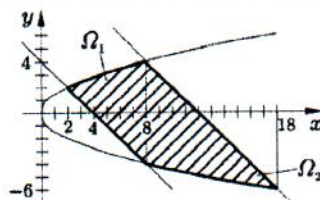
- | | |
|--|---|
| 1. $D : x = 1, y = x, y = 2x$ | 9. $D : y \leq x^2, y \leq -x + 2, y \geq 0$ |
| 2. $D : y = 5, y = 3x, y = \frac{1}{3}x$ | 10. $D : y \geq x^2, y \leq -x + 2, x \geq 0$ |
| 3. $D : x + y = 1, y = x, y = \frac{1}{2}x$ | 11. $D : y \leq -2x, y^2 \leq x$ |
| 4. $D : x = 1, x = 2, y - x = 5, y = 3$ | 12. $D : y \leq x, y \geq x^2$ |
| 5. $D : x \leq y, y \leq 1, x \geq 0$ | 13. $D : x = 1, x = 2, y = x, y = \frac{1}{x}$ |
| 6. $D : x \leq y, y \leq 2$ | 14. $D : y = 0, y = 1, x = \sqrt{y},$
$x = 3 - 2y$ |
| 7. $D : y = x^2 + 1, y = x - 1, 0 \leq x \leq 1$ | 15. $D : y = 0, y = 1, y = \sqrt{x},$ |
| 8. $D : y^2 = x, 1 \leq x \leq 3$ | |

Obrázek 18: $\Omega : x = 2, y = x, xy = 1$

89. Příklad Spočtěte $\iint_{\Omega} dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$.

(3e)

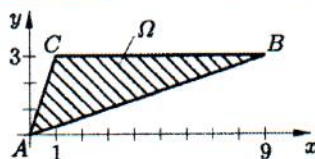
Řešení Integrační obor Ω je ohraničen dvěma přímkami a parabolou. Viz Obrázek 19. Je zřejmé, že obor Ω je nutné rozdělit na dvě části Ω_1 a Ω_2 tak, že $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Oblasti Ω_1, Ω_2 popíšeme jako oblasti typu (x, y) . Platí $\Omega_1 = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\}$ a $\Omega_2 = \{[x, y]; 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}$.

Obrázek 19: $\Omega : x + y = 4, x + y = 12, y^2 = 2x$

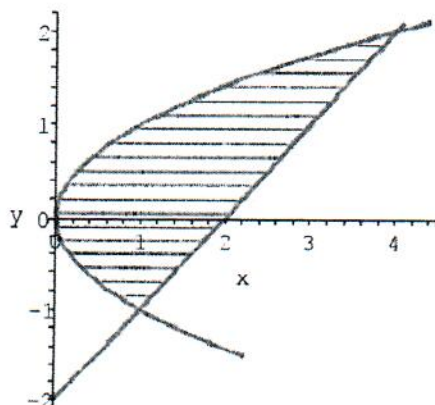
$$\iint_{\Omega} dx dy = \iint_{\Omega_1} dx dy + \iint_{\Omega_2} dx dy = \int_0^8 \left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} dy \right) dx + \int_8^{18} \left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} dy \right) dx = \int_0^8 (\sqrt{2x} + x - 4) dx + \int_8^{18} (\sqrt{2x} - x + 12) dx = \frac{74}{3} + \frac{122}{3} = 62.$$

90. Příklad Spočtěte $\iint_{\Omega} \sin y^2 dx dy$, kde Ω je určena body $A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkami. Viz Obrázek 20. Obor Ω popíšeme jako oblast typu (y, x) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq y \leq 3, \frac{1}{3}y \leq x \leq 3y\}$. Volba typu (x, y) vede k rozdělení oblasti na dvě části a navíc k integrálu $\int \sin y^2 dy$. Tento integrál nelze vyřešit nad množinou elementárních funkcí.

Obrázek 20: $\Omega : A = [0, 0], B = [9, 3], C = [1, 3]$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \cos y^2 dx dy &= \int_0^3 \left(\int_{\frac{1}{3}y}^{3y} \cos y^2 dx \right) dy = \int_0^3 [x \cos y^2]_{\frac{1}{3}y}^{3y} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 2y \cos y^2 dy = \left| 0 \rightarrow 0, 3 \rightarrow 9 \right| = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^9 \cos t dt = \frac{4}{3} [\sin t]_0^9 = \frac{4}{3} \sin 9. \end{aligned}$$



Obr. 3

$$\begin{aligned} \int_M x^2 y \, dA &= \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} x^2 y \, dx \, dy = \int_{-1}^2 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{x=y^2}^{x=y+2} dy = \\ &= \int_{-1}^2 \frac{1}{3} y ((y+2)^3 - y^6) \, dy = \frac{603}{40}. \end{aligned}$$

(34)

Příklad 1.11. Vypočítejme dvojný integrál

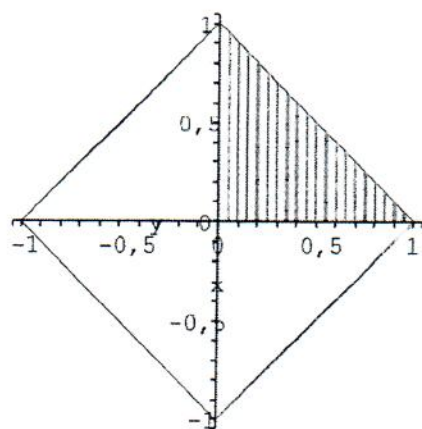
$$\int_M (x^2 + y^2) \, dA,$$

kde M je množina ohraničená křivkou $|x| + |y| = 1$.

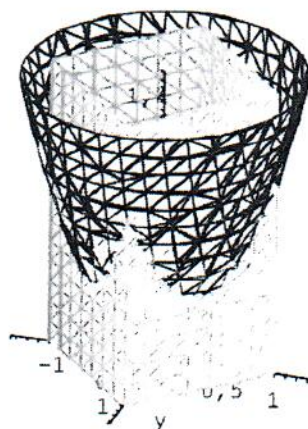
Řešení: Hraniční křivkou množiny M je lomená čára, s vrcholy v bodech $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ a $(0, -1)$, (Obr. 4). Funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ je na množině M spojitá a nezáporná. Z definice dvojného integrálu $\int_M f(x, y) \, dA$ víme, že jeho geometrickým významem (za předpokladu, že funkce f je na M spojitá a nezáporná) je objem válcového tělesa (Obr. 5)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Těleso, jehož objem máme počítat (část hranolu jehož osa je rovnoběžná s osou z), je symetrické podle rovin $x = 0$ a $y = 0$. Stačí tedy počítat pouze přes část množiny M ležící v 1. kvadrantu. Výsledný integrál bude čtyřnásobkem takto



Obr. 4



Obr. 5

vypočítaného integrálu. Je tedy

$$\begin{aligned} \int_M (x^2 + y^2) dA &= 4 \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy dx = 4 \int_0^1 \left[yx^2 + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

Příklad 1.12. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M (2x + y) dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 3\}$.

Výsledek: 27/2

Příklad 1.13. Vypočítejte dvojný integrál

$$\int_M \sqrt{xy - y^2} dA,$$

kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \leq x \leq 10y\}$.

Výsledek: 6

Příklad 1.14. Vypočítejte dvojný integrál

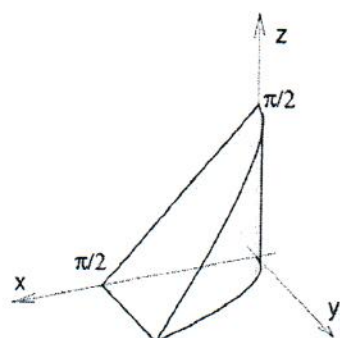
$$\int_M \frac{y}{x^2 + y^2} dA,$$

kde M je uzavřená množina ohraničená křivkami $y^2 = 2x$ a $y = 2x$.

Výsledek: $\ln(5/4)$

(3g)

c) $\iiint_M y \cos(z+x) dx dy dz$, kde M je ohraničena plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x+z = \frac{\pi}{2}$.



Množina M je shora ohraničena rovinou $x + z = \frac{\pi}{2}$, dále souřadnými rovinami a parabolickou válcovou plochou $y = \sqrt{x}$. Průmět do souřadné roviny xy je shora ohraničen grafem funkce $y = \sqrt{x}$, dále osou x a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\begin{aligned} \iiint_M y \cos(z+x) dx dy dz &= \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y \cos(z+x) dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} [y \sin(z+x)]_{z=0}^{\frac{\pi}{2}-x} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} y(1 - \sin x) dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1 - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cvičení

V následujících příkladech vypočítejte zadané integrály

Příklad 8 $\iint_B dx dy$, kde B je množina ohraničena přímkami $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$. [3]

Příklad 9 $\iint_B (2x + 3y + 1) dx dy$, kde B je množina ohraničena parabolou $y^2 = 2x$ a její tetivou jdoucí body $A = (2, -2)$, $B = (8, 4)$. [$187\frac{1}{5}$]

Příklad 10 $\iint_B dx dy$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}$ [$\frac{16}{3}\sqrt{2}$]

Příklad 11 $\iint_B xy^2 dx dy$, kde B je množina ohraničena parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = \frac{p}{2}$. [$\frac{p^5}{21}$]

Příklad 12 $\iiint_B xy dx dy dz$, kde B je množina ohraničena plochami $z = xy$, $x + y = 1$ a $z = 0$. [$\frac{1}{180}$]

Příklad 13 $\iiint_B dx dy dz$, kde B je množina ohraničena plochami $z = xy$, $y = \sqrt{x}$ a rovinami $x + y = 2$, $y = 0$, $z = 0$. [$\frac{3}{8}$]

Příklad 14 $\iiint_B dx dy dz$, kde B je množina ohraničena plochami $z = 1 - 4x^2 - y^2$ a $z = 0$. [$\frac{\pi}{4}$]

Příklad 15 $\iiint_B xyz dx dy dz$, kde B je množina ohraničena plochami $x = 1$, $y = x$, $z = y$ a souřadnými rovinami. [$\frac{1}{48}$]

Příklad 1.91. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W x^2 z e^{x-y+z^2} dV,$$

kde $W = \langle -1, 1 \rangle \times \langle -2, 0 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.

Výsledek: $(e^2 - 5)(e^2 - 1)(e - 1)/(2e)$

Příklad 1.92. Vypočítejte trojný integrál

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV,$$

kde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$.

Řešení: Množina W je čtyřstěn s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník M (Obr. 16) s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Zřejmě $\forall (x, y) \in M$ je $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Pomocí Fubiniovy věty můžeme tedy daný trojný integrál převést na dvojný z jednoduchého

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV = \int_M \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y} dz \right) dA.$$

Zapišeme-li množinu M ve tvaru

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

můžeme použitím Fubiniovy věty pro dvojný integrál náš trojný integrál převést na trojnásobný integrál. Potom

$$\begin{aligned} \int_W \frac{1}{1+x+y} dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{1+x+y} dz dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z}{1+x+y} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1-x-y}{1+x+y} dy dx = \\ &= \int_0^1 [2 \ln(1+x+y) - y]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 (2 \ln 2 - 2 \ln(x+1) + x - 1) dx = \\ &= \frac{3}{2} - 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Při výpočtu trojného integrálu můžeme postupovat také např. takto:

Pro libovolné $z \in (0, 1)$ leží vždy bod (x, y) v trojúhelníku, jehož kolmý průmět do roviny xy ($z = 0$) je trojúhelník M_z s vrcholy $(0, 0)$, $(1-z, 0)$, $(0, 1-z)$ (Obr. 17). Podle Fubiniovy věty můžeme tedy trojný integrál převést na jednoduchý a dvojný, tj.

$$\int_W \frac{1}{1+x+y} dV = \int_0^1 \left(\int_{M_z} \frac{1}{1+x+y} dA \right) dz.$$

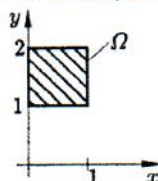
Část II

Integrační počet funkcí více proměnných

9 Dvojný integrál - Fubiniho věta

81. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} x^y dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je čtverec, tj. dvojrozměrný interval $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Viz Obrázek 11. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (y, x) .

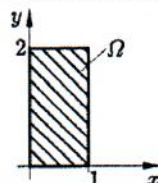
Obrázek 11: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$

$$\iint_{\Omega} x^y dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^2 \frac{1}{y+1} dy = \left[\ln |y+1| \right]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}.$$

V případě, že oblast Ω budeme chápat jako oblast typu (x, y) , narazíme při výpočtu na integrál $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x} dx$, který nelze vyřešit v množině elementárních funkcí.

82. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy$, kde $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.

Řešení Integrační obor Ω je obdélník $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$. Postupujeme analogicky jako v předchozím příkladu. Aplikujeme Fubiniho větu. Oblast Ω budeme uvažovat jako oblast typu (x, y) .

Obrázek 12: $\Omega = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^2 y e^{xy} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 x^2 y e^{xy} dx \right) dy = \left| \begin{array}{l} u = x^2 y, \quad u'_y = x^2 \\ v'_y = e^{xy}, \quad v = \frac{1}{x} e^{xy} \end{array} \right| = \int_0^2 \left(\left[x y e^{xy} \right]_0^1 - x \int_0^1 e^{xy} dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[(xy - 1) e^{xy} \right]_0^1 dx = \int_0^2 (2x - 1) e^{2x} + 1 dx = \int_0^2 2x e^{2x} dx + \int_0^2 e^{2x} dx + \int_0^2 1 dx = \left[x e^{2x} - e^{2x} - x \right]_0^2 = 2. \end{aligned}$$

83. Příklad Spočítejte $\iint_{\Omega} xy^2 dx dy$, kde Ω je určena vztahy $x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x + y - 1 \geq 0$.

Řešení Integrační obor Ω je ohraničen přímkou a kružnicí. Viz Obrázek 13. Oblast Ω je typu (x, y) i (y, x) . Zvolme typ (x, y) . Platí $\Omega = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. K výpočtu použijeme Fubiniho větu.

$$\iint_{\Omega} xy^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x}{3} \left(\sqrt{(1-x^2)^3} - (1-x)^3 \right) dx = \frac{1}{20}.$$

Tedy integrujeme danou funkci.

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} 2e^{x/y} dy dx.$$

Máme drobný problém, integrál $\int e^{x/y} dy$ je dost drsný, jeden z těch, které nejdou vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Naštěstí máme alternativu, zkusíme vodorovné řezy a doufáme, že vyjdou lepší integrály. Pro dané y se hodnoty x na odpovídajícím řezu mění mezi $x = y^2$ a $x = y$ (pěkné vzorce, možná jsme tak měli dělat i ten obsah). Dostáváme

$$\iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA = \int_0^1 \int_{y^2}^y 2e^{x/y} dx dy.$$

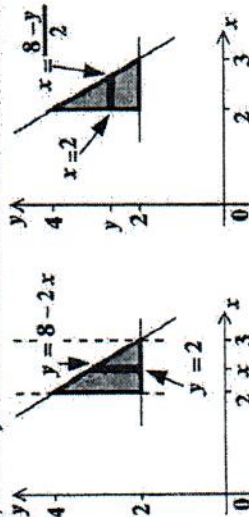
Toto je mnohem snazší, potřebujeme najít $\int e^{x/y} dx$, což je standardní integrál, který se nejlépe dělá substitucí. Nakonec také budeme potřebovat integraci per partes.

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA &= \int_0^1 \int_{y^2}^y 2e^{x/y} dx dy = \int_0^1 \left[2ye^{x/y} \right]_{x=y^2}^{x=y} dy = \int_0^1 (2ye^{1} - 2ye^{y^2/y}) dy = \int_0^1 (2ye - 2ye^{y^2}) dy \\ &= \int_0^1 (2ye - 2ye^{y^2}) dy = \int_0^1 2ye dy - \int_0^1 2ye^{y^2} dy = e \int_0^1 2y dy - \int_0^1 2ye^{y^2} dy \\ &= e \left[y^2 \right]_0^1 - \left[2ye^{y^2} \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{y^2} dy = e - 2e + \left[2e^{y^2} \right]_0^1 = e - 2. \end{aligned}$$

Průměr je tedy

$$\frac{1}{A(\Omega)} \iint_{\Omega} 2e^{x/y} dA = 6e - 12.$$

6. Nejprve potřebujeme zjistit, přes jakou oblast Ω integrujeme. Vnitřní proměnnou je y , která nás pohybuje nahoru a dolů, takže jdeme po svislých řezech. Pozice těchto řezů jsou dány hodnotami x , takže ten nejvíce vlevo je na přímce $x = 2$ a ten nejvíce vpravo na přímce $x = 3$. Z limit vnitřního integrálu vidíme, že pro dané x jde odpovídající svislý řez od křivky $y = 2$ po křivku $y = 8 - 2x$, takže Ω je oblast mezi těmito dvěma křivkami. Nakreslíme obrázek.

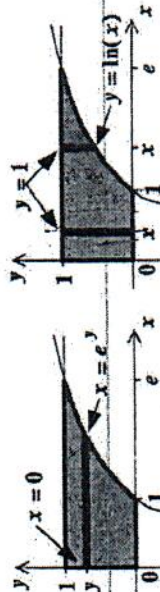


Změna pořadí integrace znamená přepnout na ten druhý směr řezů (viz obrázek vpravo). Vodor-

ovné řezy jsou dány volbou nějakého y mezi 2 a 4 (to bude vnější integrál), pro takové y se proměnná x pohybuje mezi $x = 2$ a $x = \frac{1}{2}(8 - y)$ (to dostaneme vyřešením vztahu $y = 8 - 2x$ pro x). Dostáváme integrál

$$\int_2^4 \int_2^{\frac{1}{2}(8-y)} f(x, y) dx dy.$$

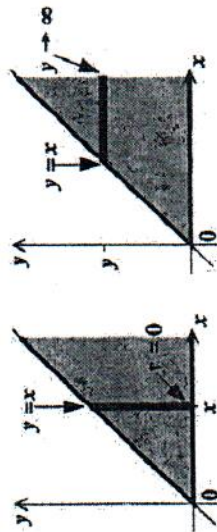
7. Zečneme určením oblasti integrace Ω . Vnitřní proměnná je x udávající pohyb doprava a doleva, což znamená, že jdeme po vodorovných řezech, nejnížší je na přímce $y = 0$ a nejvyšší u $y = 1$. Řezy sahají od křivky $x = 0$ po křivku $x = e^y$, což je $y = \ln(x)$. Tedy jsme připravili to nakreslit.



Pro změnu pořadí integrace přejdeme na svislé řezy, ale obrázek jasně ukazuje, že pak máme dva typy řezů, jinými slovy, dostaneme dva integrály: Pro x mezi 0 a 1 jdou svislé řezy od $y = 0$ po $y = 1$, pro x mezi 1 a e jdou svislé řezy od $y = \ln(x)$ po $y = 1$. Dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx + \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 f(x, y) dy dx.$$

8. Nejprve určíme oblast integrace Ω . Vnitřní integrál s pracovní proměnnou y ukazuje na svislé řezy, každý řez se rozkládá mezi křivkami $y = 0$ a $y = x$. Řezy bereme pro všechna $x \geq 0$, obrázek je teď jasný.



Známa pořadí integrace odpovídá přechodu k těm druhým řežům, tedy k vodorovným (viz obrázek napravo). Abychom pokryli celou Ω , musíme uvažovat vodorovné řezy až do nekonečna, jejich pozice jsou tedy dány pomocí y z množiny $(0, \infty)$. Pro zvolené y pak odpovídající řez nechává x probíhat mezi křivkou $x = y$ a nekonečnem. A už je tu integrál.

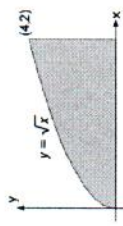
$$\int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

9. Protože je daná oblast obdélník,

6. Změňte pořadí integrace

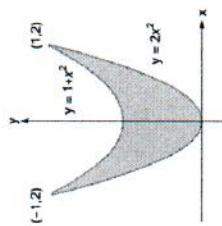
(a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x, y) dy dx$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x, y) dx dy$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x, y) dy dx$

7. Který z následujících integrálů počítá obsah útvaru na obrázku?



A $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1 dy dx$ C $\int_0^2 \int_0^4 1 dx dy$
 B $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1 dx dy$ D $\int_0^2 \int_0^{y^2} 1 dx dy$

8. Který z následujících výrazů NEpočítá obsah útvaru na obrázku?



A $\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy dx$
 B $2 \int_0^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy dx$
 C $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}/2} 1 dx dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}/2} 1 dx dy$
 D $2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{y}/2} 1 dx dy$

9. Určete množinu, přes kterou integrujeme v integrálu

$$\int_0^1 \int_z^1 f(x, y, z) dz dy dx.$$



10. Na obrázku je těleso ohraničené plochami $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 1$ a plochou $y = 2 - x^2$. Který z následujících integrálů počítá jeho objem?

A $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} \int_0^{1-x} dz dy dx$
 B $\int_0^1 \int_1^{1-x} \int_0^{2-x^2} dz dy dx$
 C $\int_0^1 \int_1^{2-x^2} \int_0^{1-x} dz dy dx$
 D $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x^2} dz dy dx$



11. Na obrázku je stejné těleso v různých polohách. Seřadte integrály $\iiint_{S_k} x d\lambda$ podle velikosti.



A $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$ D $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$
 B $I_2 < I_1 = I_3 < I_4$ E $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$
 C $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$

Zdroj 7.-11.: <http://www.cpp.edu/~conceptests/question-library/mat215.shtml>



Figure 1: <https://mathjokes4mathfolks.wordpress.com/2012/10/31/scary-math-facts-for-halloween/>