

9. cvičení – Fubiniho věta

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Fubiniova). *Nechť $(X, \mathbb{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ -konečné. Buď $(\mathbb{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$ -měřitelná funkce na $\overline{\rho}$ -měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ -skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g d\mu$$

a

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g d\mu = \int_X \left(\int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Poznámka 2. Speciálně lze Fubiniho větu použít, jestliže

- M je otevřená (nebo uzavřená) a f je spojitá a **nezáporná** (nekladná) na M .
- M je otevřená (nebo uzavřená) a **omezená** a f je spojitá a **omezená** na M .
- M je otevřená (nebo uzavřená) a f má na M integrovatelnou **majorantu**.

Příklady

1. Spočtěte

- | | |
|--|--|
| (a) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ | (d) $\int_0^\infty \frac{\arctan x^a - \arctan x^b}{x \ln x} dx$ |
| (b) $\int_0^\infty \frac{\ln(1 + a^2 x^2) - \ln(1 + b^2 x^2)}{x^2} dx$ | (e) $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ |
| (c) $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx$ | (f) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$ |

2. Spočtěte míru množiny

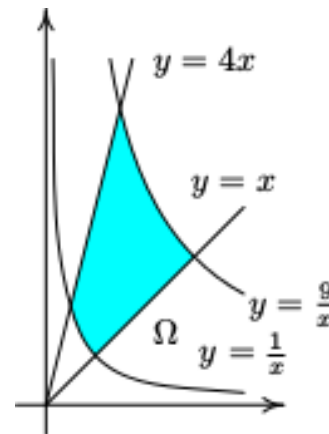
- (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x + 2\}$
- (b) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq x, 0 \leq z \leq xy^2\}$
- (c) M , která je ohraničena plochami $2x + 2y + z = 6$, $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$.
- (d) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \arctan y, 0 \leq z \leq \frac{6x}{1 + y^2}\}$

3. Spočtěte integrál přes množinu

- (a) $\int_M xy dA$ kde M je ohraničena křivkami $y = -x$ a $y = x - x^2$.
- (b) $\int_M y d\lambda$, kde M je určena vztahy $x^2 - y + 2 = 0$ a $x + y - 4 = 0$.
- (c) $\int_M e^{x/y} d\lambda$, kde M je určena vztahy $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ a $y^2 = x$.
- (d) $\int_M \frac{y}{x} d\lambda$, kde M je určena vztahy $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = \frac{1}{2}$.
- (e) $\int_M 1 d\lambda$, kde M je určena vztahy $x + y = 4$, $x + y = 12$ a $y^2 = 2x$.
- (f) $\int_M x^2 + y^2 dA$ kde $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$
- (g) $\int_M y \cos(x+z) dA$ kde M je ohraničena plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$.
- (h) $\int_M \frac{dA}{1+x+y}$ kde $M = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

4. Sestavte (nepočítejte) dvojné integrály z funkce $f(x, y)$ přes množiny

- (a) $M = \{x \leq 2; 1 \leq y \leq e^x\}$
- (b) $M = \{0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x^2\}$
- (c) $M = \{x^2 - 4x + 5 \leq y \leq 6x - 3 - x^2\}$
- (d) M na obrázku



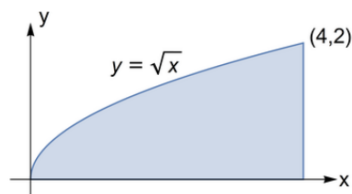
Bonus

5. Spočtěte integrál $\int_M x^y d\lambda$, kde $M = [0, 1] \times [1, 2]$. Zkuste zaměnit pořadí integrace.

6. Změňte pořadí integrace

(a) $\int_2^3 \int_2^{8-2x} f(x, y) \, dy \, dx$ (b) $\int_0^1 \int_0^{e^y} f(x, y) \, dx \, dy$ (c) $\int_0^\infty \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx$

7. Který z následujících integrálů počítá obsah útvaru na obrázku?



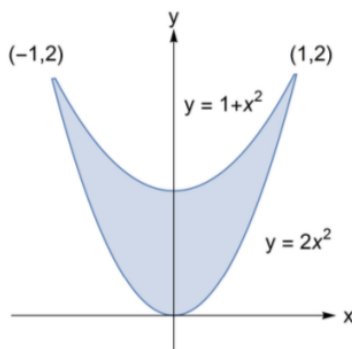
(A) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 1 \, dy \, dx$

(C) $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^4 1 \, dx \, dy$

(B) $\int_0^4 \int_0^2 \sqrt{x} \, dy \, dx$

(D) $\int_0^2 \int_0^{y^2} 1 \, dx \, dy$

8. Který z následujících výrazů NEpočítá obsah útvaru na obrázku?



(A) $\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 \, dy \, dx$

(B) $2 \int_0^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 \, dy \, dx$

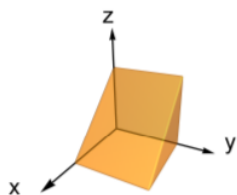
C $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}/2} 1 \, dx \, dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{-\sqrt{y-1}/2} 1 \, dx \, dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}/2}^{\sqrt{y}/2} 1 \, dx \, dy$

D $2 \int_0^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y}/2} 1 \, dx \, dy$

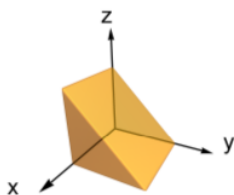
9. Určete množinu, přes kterou integrujeme v integrálu

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^1 f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx.$$

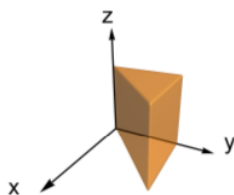
A.



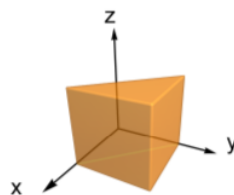
B.



C.

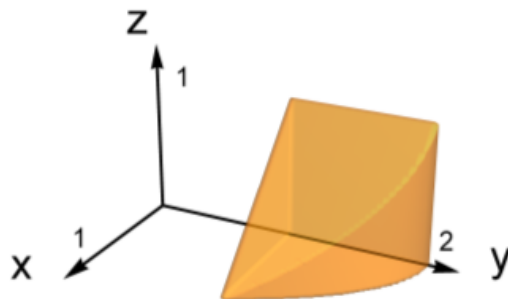


D.

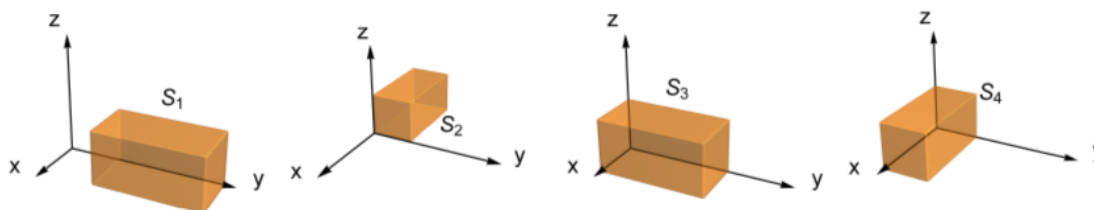


10. Na obrázku je těleso ohraničené plochami $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 1$ a plochou $y = 2 - x^2$. Který z následujících integrálů počítá jeho objem?

- (A) $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} \int_0^{1-x} dz dy dx$
 (B) $\int_0^1 \int_1^{1-x} \int_0^{2-x^2} dz dy dx$
 (C) $\int_0^1 \int_1^{2-x^2} \int_0^{1-x} dz dy dx$
 (D) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x^2} dz dy dx$



11. Na obrázku je stejné těleso v různých polohách. Seřadte integrály $\int \int \int_{S_k} x d\lambda$ podle velikosti.



- (A) $I_1 < I_2 < I_3 < I_4$
 (B) $I_2 < I_1 = I_3 < I_4$
 (C) $I_2 < I_1 < I_3 < I_4$
 (D) $I_1 < I_2 < I_4 < I_3$
 (E) $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$

Zdroj 7.-11.: <http://www.cpp.edu/concepttests/question-library/mat215.shtml>



Figure 1: <https://mathjokes4mathyfolks.wordpress.com/2012/10/31/scary-math-facts-for-halloween/>

(2) $\log(1+t) \leq t$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$. Zvolte $\delta > 0$ a odhadněte integrál pro $|\alpha| < \delta$.
 (4d) Situace $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$ z věty o spojitosti.