8. cvičení – Derivace integrálu závislého na parametru

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Limita

1. Určete $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$, kde $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$, $\alpha \in (0,\infty)$.

   Řešení: Uvažujme posloupnost $\{\alpha_n\}$, kde $\alpha_n \to \infty$, $\alpha_n \in (0,\infty)$, $\alpha_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

   Pokud ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = A$ pro každou takovou posloupnost α_n, tak už pak z Heineho věty bude $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = A$.

   Limitu spočteme pomocí Lebesgueovy věty pro limitu posloupnosti a integrál.

   - Bodová limita: Zafixujeme $x \in (0,\infty)$. Pak
     $$\lim_{n\to\infty} e^{-\alpha_n x} = 0.$$
     Tedy $f(x) = 0$ na $(0,\infty)$.
   - Lebesgue. Uvažujme interval $T = [\delta,\infty)$. Protože $\alpha_n \to \infty$, tak můžeme BÚNO předpokládat, že $\alpha_n \in T$.
     Položme $g(x) = e^{-\delta x}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí
     $$|e^{-\alpha_n x}| \leq e^{-\delta x}$$
     .
   - Závěr:
     $$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha_n x}\,dx = \int_0^\infty 0 = 0.$$

   Z Heineho pak plyne, že i
   $$\lim_{\alpha\to\infty} = 0.$$

2. Určete $\lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha)$, kde $F(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\sin x)}{x}\,dx$, $\alpha \in (0,\infty)$.

   Řešení: Uvažujme posloupnost $\{\alpha_n\}$, kde $\alpha_n \to 0+$, $\alpha_n \in (0,\infty)$, $\alpha_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

   Pokud ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = A$ pro každou takovou posloupnost α_n, tak už pak z Heineho věty bude $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = A$.

   Limitu spočteme pomocí Lebesgueovy věty pro limitu posloupnosti a integrál.

   - Bodová limita: Zafixujeme $x \in (0,\pi)$. Pak
     $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha_n \sin x)}{x} = 0$$
     Tedy $f(x) = 0$ na $(0,\pi)$.

- Lebesgue. Uvažujme interval $T = (0,1)$. Protože $\alpha_n \to 0+$, tak můžeme BÚNO předpokládat, že $\alpha_n \in T$.
  Položme $g(x) = 1$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí
$$\left|\frac{\ln(1+\alpha_n \sin x)}{x}\right| \leq \left|\frac{\alpha_n \sin x}{x}\right| \leq \alpha \leq 1.$$
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha_n \sin x)}{x} = \int_0^\pi 0 = 0$$

Z Heineho pak plyne, že i
$$\lim_{\alpha\to\infty} = 0.$$

3. Určete $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$ a $\lim\limits_{\alpha\to 0} F(\alpha)$, kde $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

Řešení: Prve limita v ∞:

Uvažujme posloupnost $\{\alpha_n\}$, kde $\alpha_n \to \infty$, $\alpha_n \in (0,\infty)$, $\alpha_n \neq \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pokud ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = A$ pro každou takovou posloupnost α_n, tak už pak z Heineho věty bude $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = A$.

Limitu spočteme pomocí Lebesgueovy věty pro limitu posloupnosti a integrál.

- Bodová limita: Zafixujeme $x \in (0,1)$. Pak
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha_n^2}} = 0$$
  Tedy $f(x) = 0$ na $(0,1)$.
- Lebesgue. Uvažujme interval $T = [1,\infty)$. Protože $\alpha_n \to \infty$, tak můžeme BÚNO předpokládat, že $\alpha_n \in T$.
  Položme $g(x) = 1$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí
$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha_n^2}}\right| \leq 1$$
  .
- Závěr:
$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha_n^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0 = 0.$$

Z Heineho pak plyne, že i
$$\lim_{\alpha\to\infty} = 0.$$

Limita v 0: Máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~hencl/cvicenitmi.pdf.

Vyřešíme pomocí odhadů. Zvolme $\delta > 0$. Pak pro $|\alpha| \leq \delta$ máme
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha_n^2}}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\delta^2}}\,\mathrm{d}x \geq \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\delta^2}}\,\mathrm{d}x \geq \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{2x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\log\delta$$

Navíc platí $\lim_{\delta\to 0+} -\frac{1}{\sqrt{2}}\log\delta = \infty$.

Tedy dohromady

$$\lim_{\alpha\to 0} F(\alpha) = \infty$$

Derivace

4. Spočtěte

(a)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in I = (-1,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{xe^{x^2}}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = xe^{-x^2(\alpha+1)}$$

- Volme $\alpha_0 = 0$. Pak $F(0) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p,\infty)$, $0 > p > -1$. Pak existuje majoranta $g(x) = xe^{-x^2(p+1)}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|xe^{-x^2(\alpha+1)}\right| \leq xe^{-x^2(p+1)}.$$

  Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s e^{-x} nebo lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty xe^{-x^2(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-x^2(\alpha+1)}}{-2(\alpha+1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2(\alpha+1)}$$

  Odtud

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}\log(\alpha+1) + c.$$

  Protože $F(0) = 0$, dopočteme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\log 1 + c \\ 0 &= c \end{aligned}$$

  Celkem

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}\log(\alpha+1).$$

(b)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^x}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$$

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in I = (-1, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = e^{-(\alpha+1)x}$$

- Volme $\alpha_0 = 0$. Pak $F(0) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $0 > p > -1$. Pak existuje majoranta $g(x) = e^{-x(p+1)}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left|\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|e^{-x(\alpha+1)}\right| \leq e^{-x(p+1)}.$$

  Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-x(\alpha+1)}}{-(\alpha+1)}\right]_0^\infty = \frac{1}{(\alpha+1)}$$

  Odtud

$$F(\alpha) = \log(\alpha + 1) + c.$$

  Protože $F(0) = 0$, dopočteme

$$\begin{aligned} 0 &= \log 1 + c \\ 0 &= c \end{aligned}$$

  Celkem

$$F(\alpha) = \log(\alpha + 1).$$

(c)

$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0)$$

Řešení: Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \beta$ je zřejmě $F(\alpha, \alpha) = 0$.
Dále tedy fixujme $\beta > 0$ a uvažujme $\alpha \in I = (0, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha, \beta) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha, \beta)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -xe^{-\alpha x^2}.$$

- Volme $\alpha_0 = \beta$. Pak $F(\beta, \beta) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.

- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $\beta > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = xe^{-x^2 p}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\right| = \left|-xe^{-\alpha x^2}\right| \leq xe^{-x^2 p}.$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat
$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty - xe^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-x^2\alpha}}{2\alpha}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}$$
Odtud
$$F(\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(\alpha) + c(\beta).$$
Protože $F(\beta,\beta) = 0$, dopočteme
$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}\log\beta + c(\beta) \\ \frac{1}{2}\log\beta &= c(\beta) \end{aligned}$$
Celkem
$$F(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

(d)
$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta \geq 0)$$

Řešení: Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \beta$ je zřejmě $F(\alpha,\alpha) = 0$.
Dále tedy fixujme $\beta > 0$ a uvažujme $\alpha \in I = (0, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x,\alpha,\beta) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x,\alpha,\beta)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha x^2}.$$
- Volme $\alpha_0 = \beta$. Pak $F(\beta,\beta) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $\beta > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = e^{-x^2 p}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\right| = \left|-e^{-\alpha x^2}\right| \leq e^{-x^2 p}.$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 spojitá, u ∞ SK s e^{-px}).

- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat

  $$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \int_0^\infty -\, e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

  Odtud

  $$F(\alpha,\beta) = -\sqrt{\pi\alpha} + c(\beta).$$

  Protože $F(\beta,\beta)=0$, dopočteme

  $$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{\pi\beta} + c(\beta) \\ \sqrt{\pi\beta} &= c(\beta) \end{aligned}$$

  Celkem

  $$F(\alpha,\beta) = \sqrt{\pi\beta} - \sqrt{\pi\alpha} \qquad \beta\ge 0, \alpha > 0.$$

- Chybí ještě situace $\beta > 0$, $\alpha \ge 0$ a situace $\beta \ge 0$, $\alpha > 0$.
  Ukážeme ze spojitosti.
  Nejprve fixujme $\beta > 0$. Chceme ukázat spojitost funkce $F(\alpha,\beta)$ v 0 zprava (jako funkce α).
  Ověříme větu o spojitosti dle parametru:
  Uvažujeme $\alpha \in T = [0,1]$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha,\beta) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2}$.
  - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha,\beta)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
  - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha,\beta)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
  - položme

    $$g(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\beta x^2}}{x^2}, & x < 1, \\ \frac{2}{x^2}, & x \ge 1. \end{cases}$$

    Pak $g \in L^1(X)$ a

    $$\left| \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \right| \le g(x).$$

  Tedy funkce je spojitá zprava v bodě 0 a odtud

  $$F(0,\beta) = \lim_{\alpha\to 0+} \sqrt{\pi\beta} - \sqrt{\pi\alpha} = \sqrt{\pi\beta}.$$

  Situaci $\alpha > 0$ a $\beta \ge 0$ vyřešíme ze symetrie funkce $f(x,\alpha,\beta)$.

(e)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in [-1,\infty)$$

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in I = (-1,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.

- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = e^{-x^2(\alpha+1)}$$
- Volme $\alpha_0 = 0$. Pak $F(0) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p,\infty)$, $0 > p > -1$. Pak existuje majoranta $g(x) = e^{-x^2(p+1)}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|e^{-x^2(\alpha+1)}\right| \leq e^{-x^2(p+1)}.$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s $e^{-x(p+1)}$.)
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat
$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}}$$
Odtud
$$F(\alpha) = \sqrt{\pi}\sqrt{\alpha+1} + c.$$
Protože $F(0) = 0$, dopočteme
$$0 = \sqrt{\pi}\sqrt{0+1} + c$$
$$-\sqrt{\pi} = c$$
Celkem
$$F(\alpha) = \sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha+1} - 1), \qquad \alpha > -1.$$
- Zbývá upočítat, že $F(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí ukázat spojitost funkce $F(\alpha)$ v -1 zprava. Ověříme větu o spojitosti dle parametru:
Uvažujeme $\alpha \in T = [-1,0]$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}$.
  - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
  - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
  - položme $g(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2 e^{x^2}}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí
$$\left|\frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}}\right| \leq \frac{e^{x^2}-1}{x^2 e^{x^2}}$$
Tedy funkce je spojitá zprava v bodě -1 a odtud
$$F(-1) = \lim_{\alpha \to -1+} \sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha+1} - 1) = -\sqrt{\pi}.$$

(f)
$$F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{\arctan \alpha x - \arctan \beta x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha,\beta > 0) \vee (\alpha,\beta < 0)$$

Řešení: Pro $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \beta$ je zřejmě $F(\alpha,\alpha) = 0$.
Dále tedy fixujme $\beta > 0$ a uvažujme $\alpha \in I = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha,\beta) = \frac{\arctan \alpha x - \arctan \beta x}{x}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha, \beta)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2}.$$
- Volme $\alpha_0 = \beta$. Pak $F(\beta, \beta) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $\beta > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{1}{1+p^2x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right| = \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} \leq \frac{1}{1 + p^2 x^2}$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat
$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\arctan \alpha x}{\alpha}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\alpha}$$
Odtud
$$F(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}\log(\alpha) + c(\beta).$$
Protože $F(\beta, \beta) = 0$, dopočteme
$$0 = \frac{\pi}{2}\log \beta + c(\beta)$$
$$-\frac{\pi}{2}\log \beta = c(\beta)$$
Celkem
$$F(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}\log \frac{\alpha}{\beta}.$$
- Pro $\alpha, \beta < 0$ máme ze symetrie a lichosti funkce $\arctan x$
$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) = F(-|\alpha|, -|\beta|) &= \int_0^\infty \frac{-\arctan|\alpha|x - (-\arctan|\beta|x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -F(|\alpha|, |\beta|) = -\frac{\pi}{2}\log\frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

(g)
$$F(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \beta \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$$

Řešení:
Fixujme $\beta > 0$ a uvažujme $\alpha \in I = (-\infty, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha, \beta) = e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}$.
- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha, \beta)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = e^{-\beta x}\cos(\alpha x).$$

- Volme $\alpha_0 = 0$. Pak $F(0,\beta) = \int_0^\infty 0 = 0 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (-\infty, \infty)$. Pak existuje majoranta $g(x) = e^{-\beta x}$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha,\beta)}{\partial \alpha}\right| = \left|e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\right| \leq e^{-\beta x}.$$
Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat
$$\frac{\partial F(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$
(dvě per partes).
Odtud
$$F(\alpha,\beta) = \arctan\frac{\alpha}{\beta} + c(\beta).$$
Protože $F(0,\beta) = 0$, dopočteme
$$0 = \arctan\frac{0}{\beta} + c(\beta)$$
$$0 = c(\beta)$$
Celkem
$$F(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

(h) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\alpha^2 \operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}$.

Řešení: Zřejmě $F(0) = 0$, navíc je $F(\alpha)$ lichá funkce, stačí tedy uvažovat $\alpha > 0$.
Položme $\alpha \in I = (0,\infty)$, $x \in X = (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x,\alpha) = \frac{\arctan(\alpha \tan x)}{\tan x}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní
$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{1+\alpha^2\tan^2 x}.$$
- Volme $\alpha_0 = 1$. Pak $F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\,\mathrm{d}x < \infty$, u 0 i u $\frac{\pi}{2}$ lze spojitě dodefinovat.
- Existuje majoranta $g(x) = 1$ tak, že $\forall x \in X$ je
$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{1}{1+\alpha^2\tan^2 x}\right| \leq 1$$
Navíc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) < \infty$.

- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu $(-\infty, \infty)$ a můžeme derivovat

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\alpha^2\tan^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $t = \tan x$, pak $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ a dostaneme (pro $\alpha \neq 1$):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+\alpha^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)(1+\alpha^2x^2)} - \frac{1}{(\alpha^2-1)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)\alpha}\left[\arctan(\alpha x)\right]_{x=0}^\infty - \frac{1}{\alpha^2-1}\left[\arctan x\right]_{x=0}^\infty \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\alpha+1}\end{aligned}$$

Odtud

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) + c$$

Za předpokladu, že F je spojitá v 0, můžeme dopočítat konstantu c. Protože $F(0) = 0$, máme

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\pi}{2}\log(1+0) + c \\ 0 &= c\end{aligned}$$

Celkem

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) \qquad \alpha > 0, \alpha \neq 1.$$

- Zbývá ověřit spojitost v 0 a v 1. Ověříme větu o spojitosti dle parametru: Uvažujeme $\alpha \in T = [0,2]$, $x \in X = (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x,\alpha) = \frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}$.
  - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
  - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
  - položme $g(x) = \frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left|\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}\right| \leq \frac{\arctan(2\tan x)}{\tan x}$$

Tedy funkce je spojitá zprava v bodě 0 a spojitá v bodě 1 a odtud

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) \qquad \alpha \geq 0.$$

Navíc $F(-|\alpha|) = -F(|\alpha|) = -\log(1+|\alpha|)$.

(i) $F(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2\sin^2 x + \beta^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x, \qquad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

Hint: dce dle α, $\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\alpha}\frac{\alpha^2\sin^2 x}{\alpha^2\sin^2 x+\beta^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\alpha+\beta}$

Řešení: Funkce $F(\alpha,\beta)$ je sudá v α i β, stačí tedy uvažovat jen $\alpha,\beta \geq 0$.

Dále fixujme $\beta > 0$ a uvažujme $\alpha \in I = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\frac{\pi}{2})$, $f(x,\alpha,\beta) = \ln(\alpha^2\sin^2 x + \beta^2\cos^2 x)$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha, \beta)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x}.$$

- Volme $\alpha_0 = \beta$. Pak $F(\beta, \beta) = \int_0^\infty \log \beta^2 = \frac{\pi}{2} \log \beta^2 < \infty$.
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $\beta > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{2}{p}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x} \right| \le \frac{2}{\alpha} \le \frac{2}{p}.$$

  Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (lze přímo upočítat).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

  Použijeme substituci $t = \tan x$, pak $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$. Tedy dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha^2 t^2}{1+t^2}}{\frac{\alpha^2 t^2}{1+t^2} + \frac{\beta^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 t^2}{\beta^2 + \alpha^2 t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

  Parciální zlomky:

$$= \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{(t^2+1)(\alpha^2 - \beta^2)} - \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 t^2 + \beta^2)} \, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\alpha} \left[\frac{\left(\alpha^2 \arctan x - \alpha\beta \arctan \frac{\alpha x}{\beta} \right)}{\alpha^2 - \beta^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{\alpha + \beta}.$$

  Odtud

$$F(\alpha, \beta) = \pi \log(\alpha + \beta) + c(\beta).$$

  Protože $F(\beta, \beta) = \pi \log \beta$, dopočteme

$$\pi \log \beta = \pi \log(\beta + \beta) + c(\beta)$$
$$\pi \log \frac{1}{2} = c(\beta)$$

  Celkem

$$F(\alpha, \beta) = \pi \log \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

- Zbývá ukázat variantu $\alpha \ge 0$, $\beta > 0$ a variantu $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$. Ukážeme ze spojitosti.
  Nejprve fixujme $\beta > 0$. Chceme ukázat spojitost funkce $F(\alpha, \beta)$ v 0 zprava (jako funkce α).
  Ověříme větu o spojitosti dle parametru:
  Uvažujeme $\alpha \in T = [0, 1]$, $x \in X = (0, \frac{\pi}{2})$, $f(x, \alpha, \beta) = \ln(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x)$.

- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha,\beta)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha,\beta)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- položme $g(x) = \max\{|\ln(\beta^2\cos^2 x)|, |\ln(1+\beta^2)|\}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí (logaritmus je rostoucí funkce):

  $$\ln(\beta^2\cos^2 x) \le \ln(\alpha^2\sin^2 x + \beta^2\cos^2 x) \le \ln(1+\beta^2\cos^2 x) \le \log(1+\beta^2)$$

  Dohromady

  $$|\ln(\alpha^2\sin^2 x + \beta^2\cos^2 x)| \le \max\{|\ln(\beta^2\cos^2 x)|, |\ln(1+\beta^2)|\}$$

Tedy funkce je spojitá zprava v bodě 0 a odtud

$$F(0,\beta) = \lim_{\alpha\to 0+} \pi \log\frac{\alpha+\beta}{2} = \pi\log\frac{\beta}{2}.$$

Situaci $\alpha > 0$ a $\beta \ge 0$ vyřešíme analogicky.

Bonus

5. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \ge 0$ a pro $\alpha \in (0,\infty)$ splňuje diferenciální rovnici $F'' + F = \frac{1}{\alpha}$.

Řešení: Funkce konverguje pro $\alpha \ge 0$, u 0 je spojitá, u ∞ SK s $\frac{1}{1+x^2}$.

Dále potřebujeme dvakrát zderivovat funkci F.

První derivace:

Uvažujeme $\alpha \in I = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x,\alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

  $$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}$$

- Volme $\alpha_0 = 1$. Pak $F(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2} < \infty$ (konvergence už zdůvodněna výše).
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p,\infty)$, $1 > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{xe^{-px}}{1+x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je

  $$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right| = \left|\frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}\right| \le \frac{xe^{-px}}{1+x^2}$$

  Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s xe^{-px}).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p,∞) a můžeme derivovat

  $$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Druhá derivace:

Uvažujeme $\alpha \in I = (0, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{-xe^{-\alpha x}}{1+x^2}$.

- Pro všechna $\alpha \in I$ je $f(x, \alpha)$ spojitá (jako funkce x na X) a tedy měřitelná.
- Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$$

- Volme $\alpha_0 = 1$. Pak $F(1) = \int_0^\infty \frac{-xe^{-x}}{1+x^2} < \infty$ (konvergence plyne ze SK s xe^{-x}).
- Uvažujme $\alpha \in \overline{I} = (p, \infty)$, $1 > p > 0$. Pak existuje majoranta $g(x) = \frac{x^2 e^{-px}}{1+x^2}$ tak, že $\forall x \in X$ je

$$\left| \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \right| \leq \frac{x^2 e^{-px}}{1 + x^2}$$

  Navíc $\int_0^\infty g(x) < \infty$ (u 0 je g spojitá, u ∞ srovnáme s $x^2 e^{-px}$).
- Podmínky věty o derivaci podle parametru jsou tedy splněny na intervalu (p, ∞) a můžeme derivovat

$$F''(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \, dx$$

Diferenciální rovnice:

$$F''(\alpha) + F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}(x^2 + 1)}{1 + x^2} \, dx = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

Bonus teorie

6. Existuje posloupnost funkcí $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ taková, že konverguje k nulové funkci na každém kompaktu a zároveň platí, že $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$?

Řešení: Ano. Např. $f_n = \chi_{(n,n+1)}$.

Zdroj: https://people.cas.uab.edu/~mosya/teaching/Problems

(2a) Hint: $|1 + a \cos x| \geq 1 - |a \cos x| \geq 1 - |a|$