7. cvičení – Integrál závislý na parametru

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $[0,\infty)$. Spočtěte $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = [0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$.

   - Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in [0,\infty)$ je $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$ a tedy $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}$ konverguje ze SK.
   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - položme $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

   $$\left|\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}.$$

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém T.

2. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0,\infty)$. Spočtěte $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (0,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = e^{-\alpha x}$.

   - Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (0,\infty)$ je

   $$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - uvažujme $\widetilde{T} = [\delta,\infty)$, $\delta > 0$. Položme $g(x) = e^{-\delta x}$. Pak $g \in L^1(X)$ a platí

   $$|e^{-\alpha x}| \le e^{-\delta x}$$

   pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[\delta,\infty)$ pro všechna $\delta > 0$. Tedy je spojitá i na celém $(0,\infty)$.

3. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(0,1)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (0,1)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$.

   - Funkce je dobře definována, u 0 srovnáme LSK s $x^{\alpha-1}$, u ∞ s $x^{\alpha-2}$.

- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T} = [p,q]$, $0 < p < q < 1$. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}}{1+x}, & x \in (0,1) \\ \frac{x^{q-1}}{1+x}, & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

  Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left| \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \right| \leq g(x)$$

  pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p,q]$ pro všechna p,q. Tedy je spojitá i na celém $(0,1)$.

4. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (-\infty,\infty)$, $x \in X = (0,\infty)$, $f(x,\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2}$.

   - Funkce je dobře definována, protože v 0 lze funkci spojitě dodefinovat a v ∞ lze srovnat s $\frac{\ln x}{x^2}$.
   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x,\alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - uvažujme $\widetilde{T} = [-p,p]$, $0 < p$. Položme

$$g(x) = \frac{\ln(1+p^2x^2)}{x^2}$$

     Pak $g \in L^1(X)$ a platí

$$\left| \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{x^2} \right| \leq g(x)$$

     pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[-p,p]$ pro všechna $p > 0$. Tedy je spojitá i na celém $\mathbb{R}$.

5. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-\alpha)\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(-\infty,\infty)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (-\infty,\infty)$, $x \in X = (0,1)$, $f(x,\alpha) = \operatorname{sgn}(x-\alpha)$.

   Nelze použít větu, tedy bude potřeba integrál přímo upočítat. Lze ukázat, že

$$F(a) = \begin{cases} 1, & a \leq 0, \\ 1-2a, & 0 < a < 1, \\ -1, & a \geq 1. \end{cases}$$

Jde tedy o spojitou funkci.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém T.

6. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (0, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = x^{\alpha-1} e^{-x}$.

- Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (0, \infty)$ srovnáme u 0 s $x^{\alpha-1}$ a u ∞ s $x^{\alpha-1}e^{-x}$.
- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T} = [p, q]$, $0 < p < q < \infty$. Položme

  $$g(x) = \begin{cases} e^{-x} x^{p-1}, & x \in (0, 1), \\ e^{-x} x^{q-1}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

  Pak $g \in L^1(X)$ a platí

  $$\left| x^{\alpha-1} e^{-x} \right| \le g(x)$$

  pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p, q]$ pro všechna p, q. Tedy je spojitá i na celém $(0, \infty)$.

7. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{2 + x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (2, \infty)$, $x \in X = (0, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{x}{2+x^\alpha}$

- Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (2, \infty)$ je v 0 spojitá a v ∞ srovnáme s $x^{1-\alpha}$.
- zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
- zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
- uvažujme $\widetilde{T} = [p, \infty)$, $2 < p$. Položme

  $$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0, 1), \\ \frac{x}{2+x^p}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

  Pak $g \in L^1(X)$ a platí

  $$\left| \frac{x}{2 + x^\alpha} \right| \le g(x)$$

  pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p, \infty)$ pro všechna $p > 2$. Tedy je spojitá i na celém $(2, \infty)$.

8. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$, je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

   Řešení: Uvažujeme $\alpha \in T = (1, \infty)$, $x \in X = (\frac{1}{2}, \infty)$, $f(x, \alpha) = \frac{\cos x}{x^\alpha}$.

   - Funkce je dobře definována, protože pro $\alpha \in (1, \infty)$ srovnáme u ∞ s $1/x^\alpha$.
   - zafixujeme $\alpha \in T$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce x) na celém X a tedy je měřitelná.
   - zafixujeme $x \in X$. Pak funkce $f(x, \alpha)$ je spojitá (jako funkce α) na celém T.
   - uvažujme $\widetilde{T} = [p, q]$, $1 < p < q < \infty$. Položme

     $$g(x) = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q}, & x \in (\frac{1}{2}, 1), \\ \frac{|\cos x|}{x^p}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

     Pak $g \in L^1(X)$ a platí

     $$\frac{|\cos x|}{x^\alpha} \leq g(x)$$

     pro $\alpha \in \widetilde{T}$.

   Závěr: funkce $F(\alpha)$ je spojitá na celém $[p, q]$ pro všechna p, q. Tedy je spojitá i na celém $(1, \infty)$.

Bonus

9. Nechť $f \in L^1(0, \infty)$. Ukažte, že pak existuje posloupnost $x_n \to \infty$ taková, že $\lim_{n\to\infty} x_n f(x_n) = 0$.

   Řešení: Příklad i s řešením máme odtud: https://people.cas.uab.edu/~mosya/teaching/Problems

   Pro spor předpokládejem, že

   $$\liminf_{x\to\infty} x|f(x)| = c > 0.$$

   Tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $x|f(x)| > c/2$ na (δ, ∞). Pak ale

   $$\int_\delta^\infty |f| \geq \int_\delta^\infty \frac{c}{2x} = \infty,$$

   což je spor s integrovatelností f.

   Pozn.: limes inferior pro funkce je definován jako

   $$\liminf_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \sup\{g(a) : a > x\} = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sup\{g(a) : a > x\}$$

10. Ukažte, že jestliže $f_1, f_2, \ldots, f_n$ jsou jednoduché funkce, tak potom jsou jednoduché i funkce $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ a $h(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$.

    Řešení:

    Víme, že jednoduchá funkce nabývá pouze konečně mnoha hodnot.

    Jestliže tedy funkce f_1 nabývá hodnot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ a funkce f_2 nabývá hodnot $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, tak funkce $g = \max\{f_1, f_2\}$ nabývá nejvýše $k + m$ hodnot, tedy je jednoduchá.

    Zbytek analogicky a indukcí.