



7. cvičení – Integrál závislý na parametru

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O spojitě závislosti integrálu na parametru). *Nechť T je metrický prostor, $\alpha_0 \in T$ a nechť $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

- (Sp-1) *pro všechna $\alpha \in T$ je funkce $x \rightarrow f(x, \alpha)$ měřitelná,*
- (Sp-2) *pro všechna $x \in X$ je funkce $\alpha \rightarrow f(x, \alpha)$ spojitá v α_0 ,*
- (Sp-3) *existuje funkce $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in T$.*

Potom $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha) d\mu(x)$, $\alpha \in T$, je spojitá v bodě α_0 .

Věta 2. Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Funkce f je **spojitá** v intervalu (p, q) právě tehdy, když je spojitá v každém intervalu $[p_0, q_0] \subset (p, q)$. Analogicky s intervaly $[p_0, q_0] \subset (p, q)$.

Algoritmus

1. Najdeme T , X a f .
2. Zafixujeme α a určíme, zda je $f(x, \alpha)$ **měřitelná** jako funkce x .
3. Zafixujeme x a určíme, zda je $f(x, \alpha)$ **spojitá** jako funkce α .
4. Najdeme **majorantu** $g \in L^1(X)$, tak že $|f(x, \alpha)| \leq g(x)$. **Nesmí** záviset na α .
5. Pozn.:
 - (a) Spojitost možno ověřovat i na menších intervalech typu $[p, q]$ a pak „roztáhnout“.
 - (b) Majorantu možno hledat nadvakrát, např. zvlášť na intervalu $(0, 1)$ a $[1, \infty)$.

Příklady

1. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx$, je spojitá v intervalu $[0, \infty)$.
2. ☸ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$, je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.
3. ☸ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$, je spojitá v intervalu $(0, 1)$.
4. * Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{x^2} dx$, je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.
5. ☼ Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - \alpha) dx$, je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$.
6. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, (tzv. Gamma funkce) je spojitá v intervalu $(0, \infty)$.

7. UkaŹte, Źe funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x}{2+x^\alpha} dx$, je spojitá v intervalu $(2, \infty)$.

8. UkaŹte, Źe funkce $F(\alpha) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$, je spojitá v intervalu $(1, \infty)$.

Bonus

9. ♣ Necht' $f \in L^1(0, \infty)$. UkaŹte, Źe pak existuje posloupnost $x_n \rightarrow \infty$ taková, Źe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n f(x_n) = 0$.

10. ✱ UkaŹte, Źe jestliŹe $f_1, f_2, \dots, f_n$ jsou jednoduché funkce, tak potom jsou jednoduché i funkce $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ a $h(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$.

**And then Satan said,
"Put the alphabet in
math.."**

Figure 1: <http://www.lovethepic.com/image/99563/and-then-satan-said,-put-the-alphabet-in-math>

(2) hleďte majorantu na $\alpha \in [\delta, \infty)$.
(3) hleďte majorantu na $\alpha \in [p, q]$. Pak zvlášt' pro $x > 1$ a $x \geq 1$.
(4) hleďte majorantu na $\alpha \in [-p, p]$. Pak zvlášt' pro $x < 1$ a $x \geq 1$.
(5) spočítejte ručně
(9) sporem
(10) jak Źe definovaná jednoduchá funkce?