6. cvičení – Řada a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Rozviňte do řady

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in [-1, 1)$

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}$$

Tedy

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log x \, \frac{x^n}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 -\sum_{n=1}^{\infty} \log x \, \frac{x^n}{n} = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \log x \, \frac{x^n}{n}$$

- Věta: Levi: funkce $f_n(x) = \log x \, \frac{x^n}{n}$ jsou nezáporné a měřitelné (protože spojité).
- Prohození a výpočet:

$$-\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \log x \, \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \log x \, \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log x \cdot x^n$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \log(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \log(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^1 =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \log x \log(1+x)\,\mathrm{d}x$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1]$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Tedy

$$f(x) = \log x \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log x \, (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \log x \, (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \, \mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \left| \log x \, (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 - \log x \, \frac{x^n}{n} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^\infty -\frac{1}{n} \int_0^1 \log x \, x^n \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^\infty -\frac{1}{n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \log x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^\infty -\frac{1}{n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)^2} < \infty
\end{aligned}$$

- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \log x \, (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \, \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^1 \log x \, x^n \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

(c) Pro $|b| < a$:
$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{b}{a^2 + b^2}$$
Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $y \in \mathbb{R}$:

$$\sin y = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Tedy

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty e^{-ax} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-ax} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} \, \mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \left| e^{-ax} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{|b|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty \left| e^{-ax} x^{2n+1} \right| \mathrm{d}x$$

Výpočet integrálu: Označme $I_k = \int_0^\infty e^{-ax} x^k \,\mathrm{d}x$. Pak z per partes ($a > 0$) je

$$I_k = \int_0^\infty e^{-ax} x^k \,\mathrm{d}x = \left[x^k \frac{e^{-ax}}{-a} \right]_0^\infty + \frac{k}{a} \int_0^\infty e^{-ax} x^{k-1} \,\mathrm{d}x = \frac{k}{a} I_{k-1}$$

Navíc $I_0 = \frac{1}{a}$.
Pak

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| e^{-ax} x^{2n+1} \right| \,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty e^{-ax} x^{2n+1} \,\mathrm{d}x = I_{2n+1} = \frac{2n+1}{a} I_{2n} = \frac{(2n+1)(2n)}{a \cdot a} I_{2n-1} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{a \cdot a \cdot a} I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n+1)!}{a^{2n+2}} \end{aligned}$$

Zpět k ověření:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{|b|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty \left| e^{-ax} x^{2n+1} \right| \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{|b|^{2n+1}(2n+1)!}{(2n+1)! a^{2n+2}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{|b|}{a} \right)^{2n+1} < \infty$$

(Součet geometrické řady.)

- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-ax} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} \,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-ax} (-1)^n \frac{(bx)^{2n+1}}{(2n+1)!} \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty e^{-ax} x^{2n+1} \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n b^{2n+1} (2n+1)!}{(2n+1)! a^{2n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{a^{2n+2}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{b}{a^2} \left(\frac{-b^2}{a^2} \right)^n \\ &= \frac{b}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p \log x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x$, $p > 0$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^\infty (-x^2)^n$$

Tedy

$$f(x) = \frac{x^p \log x}{1 + x^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n+p} \log x$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n+p} \log x \,\mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \left|(-1)^n x^{2n+p}\log x\right|\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 -x^{2n+p}\log x\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{x^{2n+p+1}}{2n+p+1}\log x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2n+p}}{2n+p+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{x^{2n+p+1}}{2n+p+1}\log x + \frac{x^{2n+p+1}}{(2n+p+1)^2}\right]_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+p+1)^2} < \infty
\end{aligned}$$

- Prohození a výpočet:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+p}\log x\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{2n+p}\log x\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n+p}\log x\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+p+1)^2}
\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \log\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x$

Řešení:

- Rozvoj: Z Taylorova rozvoje máme pro $y \in (-1,1)$

$$\log\frac{1+y}{1-y} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}.$$

Protože $0 < e^{-x} < 1$ pro $x \in (0,\infty)$, můžeme rozvíjet

$$\log\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = -\log\left(\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^{-x})^{2n+1}}{2n+1}.$$

Tedy

$$f(x) = \log\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{x(-2n-1)}}{2n+1}.$$

Počítáme tedy integrál

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} -2\frac{e^{x(-2n-1)}}{2n+1}\,\mathrm{d}x$$

- Lebesgueova věta: Ověřujeme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty \left|-2\frac{e^{x(-2n-1)}}{2n+1}\right|\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty 2\frac{e^{x(-2n-1)}}{2n+1}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[-2\frac{e^{x(-2n-1)}}{(2n+1)^2}\right]_0^\infty \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2} < \infty
\end{aligned}$$

- Prohození a výpočet:

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty -2\frac{e^{x(-2n-1)}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty -2\frac{e^{x(-2n-1)}}{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{-2}{(2n+1)^2}.$$

Bonus

2. Spočtěte limitu
   (a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\arctan nx}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
   Řešení:
   - Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$:

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(nx)}{1+x^3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3}.$$

   - Levi: $f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{1+x^3}$. Platí $f_1(x) = \frac{\arctan x}{1+x^3} \geq 0$.
   Navíc

   $$f_n = \frac{\arctan(nx)}{1+x^3} \leq \frac{\arctan((n+1)x)}{1+x^3} = f_{n+1},$$

   protože $\arctan x$ je rostoucí funkce.
   (Jde i z Lebesguea, majoranta: $g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3}$.)
   - Závěr:

   $$\begin{aligned}\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{\arctan(nx)}{1+x^3} &= \int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{2}}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1/3}{1+x} + \frac{2/3-x/3}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3}\ln(1+x) + \frac{\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\left[\ln\frac{1}{x^2-x+1} + \ln(1+x)^2 + \frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

   (b) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$
   Řešení:
   - Bodová limita pro $x\in(0,\infty)$:

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = 0\cdot e^{-x} = 0$$

   - Lebesgue pro $x>1$ je:

   $$\begin{aligned}\left|\frac{\sin\frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right| &\leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k\right)^{-1} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}n(n-1)\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1} \leq \frac{4}{x^2}\end{aligned}$$

Pro $0 < x < 1$ máme

$$\left| \frac{\sin \frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \right| \leq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \leq 2$$

(plyne ze znalosti průběhu a limity $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$).

- Závěr:

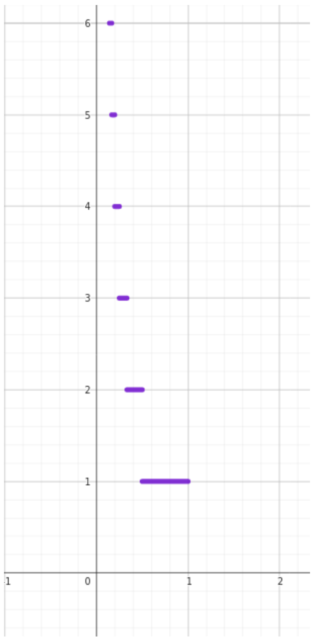
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^\infty 0 = 0.$$

3. Příklad máme z https://people.cas.uab.edu/~mosya/teaching/Problems.
   Nechť $f_n = n\,\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$.
   (a) Najděte $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \,\mathrm{d}\lambda$, jestliže ovšem existuje.
   Řešení: Lze přímo upočítat:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n\,\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\,[x]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

   (b) Existuje integrovatelná majoranta pro $x \in (0,1)$?
   Řešení: Neexistuje. Uvažujme nejmenšího možného kandidáta na majorantu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}.$$



Ale (z Leviho)

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 n\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$