6. cvičení – Řada a integrál

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Leviho pro řady). Nechť $f_n : X \to [0, \infty]$ jsou měřitelné **nezáporné** funkce. Potom

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 2 (Lebesgueova věta pro řady). Nechť $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ jsou měřitelné funkce a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Pak $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje absolutně pro skoro všechna $x \in X$ a

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}u.$$

Algoritmus

1. Rozvineme funkci do řady pomocí známých **Taylorových řad**. Zkontrolujeme poloměr konvergence.
2. Najdeme a odůvodníme vhodnou větu pro prohození řady a integrálu:
   (a) Jsou funkce f_n **nezáporné**? $\to$ Levi.
   (b) Konverguje **absolutně** $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|$? $\to$ Lebesgue.
   (c) Jinak: zkusíme sestavit posloupnost částečných součtů a použít Lebesgueovu větu pro posloupnosti.
3. **Prohodíme** řadu a integrál a **spočteme**.
4. Pozn.: Někdy je výhodné počítat v pořadí $\sum \int$ místo $\int \sum$.

Hinty

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n = n! \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Příklady

1. Rozviňte do řady

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1-x) \, \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1+x) \, \mathrm{d}x$

(c)♡ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, \mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$, $|b| < a$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p \log x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$, $p > 0$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \log \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) \mathrm{d}x$

Bonus

2. Spočtěte limitu

(a)❀ $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan nx}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ (b)❄ $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{x}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$

3. Nechť $f_n = n\,\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$.
   (a) Najděte $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \,\mathrm{d}\lambda$, jestliže ovšem existuje.
   (b) Existuje integrovatelná majoranta pro $x \in (0,1)$?

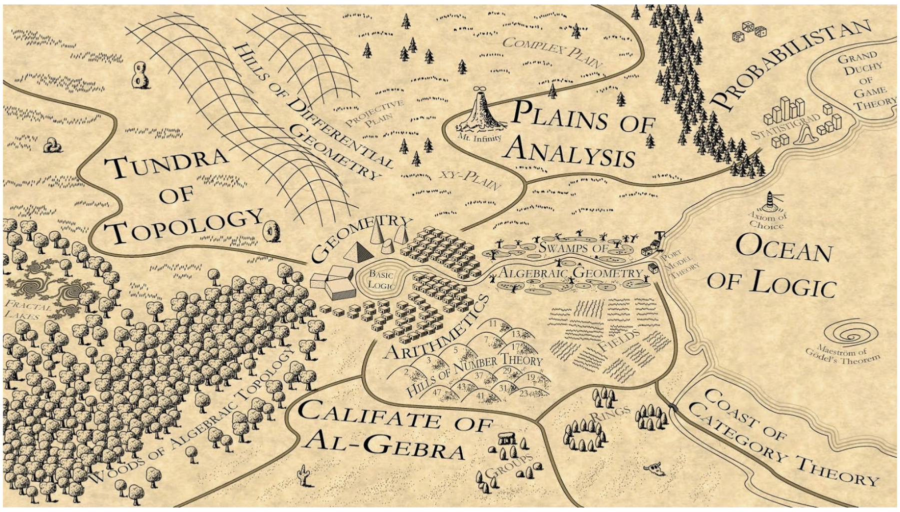

Figure 1: http://cvgmt.sns.it/HomePages/cm/

- (1c) Rozviňte $\sin bx$. Integrál pak řešte jako rekurentní vzorec.
- (2a) Parciální zlomky, $1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$
- (2b) Při hledání majoranty pomůže binomický rozvoj